Cent anys de E_8†

Jaume Aguadé

Lliçó inaugural del curs 91–92 a la Secció de Matemàtiques de la UAB

Cap al 1980, Frank Adams va rebre una carta firmada per un tal "E_8" que comença dient:

> "Senyors,
>
> Els matemàtics poden dividir-se en dues classes; aquells que coneixen i estimen els grups de Lie i els que no ho fan. Entre aquests últims pot observar-se i lamentar-se la difusió de les següents opinions concernents el grup de Lie compacte de rang 8 i dimensió 248, usualment anomenat E_8 . . .

i, a continuació, E_8 es defensa de certs retrets que se li fan respecte de la seva torsió i inaccessibilitat. Com que jo em compto entre els matemàtics del primer grup, els que estimen els grups de Lie, voldria, en aquesta lliçó inaugural, presentar-vos alguns aspectes d'aquest planeta màgic anomenat E_8. No us oferiré pas un tractament sistemàtic, sinó, més aviat, una "projecció de diapositives" sobre alguns viatges que jo he fet al país de E_8.

1 Una certa equació de segon grau

Sembla ser que la primera vegada que E_8 es va manifestar als humans va ser cap al 1872 quan Korkine i Zolotareff estudiaven certes equacions de

†Una versió molt esquemàtica d'aquest treball va aparèixer al suplement de ciència de "La Vanguardia" del dia 8 de juny de 1991 (amb un desafortunat títol del qual no en sóc responsable).

segon grau. Comencem, per tant, parlant d'equacions de segon grau, com per exemple

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Sabem que això representa una circumferència.

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

també representa una circumferència, com podem veure molt fàcilment utilitzant un mètode anomenat *completar els quadrats:*

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 1 =$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 - 4$$

i el canvi de coordenades

$$X \mapsto x - 2$$

$$Y \mapsto y + 1$$

ens converteix l'equació anterior en

$$X^2 + Y^2 = 4$$

que és, clarament, una circumferència.

Aquest mètode pot utilitzar-se per a totes les equacions de segon grau en un nombre qualsevol de variables i dóna lloc a una classificació completa de les equacions de segon grau. En dues variables, per exemple, s'obté el que ja coneixem: tota equació de segon grau representa, després d'un canvi de variables, o bé una paràbola, o bé una el.lipse, o bé una hipèrbola (llevat dels casos degenerats).

La situació canvia radicalment si només acceptem canvis de coordenades que siguin *enters*, és a dir, amb coeficients que siguin nombres enters i de manera que el canvi de coordenades invers també tingui coeficients enters. Aleshores, moltes equacions que eren equivalents deixen de ser-ho i el problema de la classificació queda obert.

Si només hi ha dues variables (i em referiré a partir d'ara a equacions *homogènies*) el problema de la classificació va ser resolt per en Gauss el 1801 en una obra sublim, "Disquisitiones Arithmeticae" que es pot dir que va inaugurar la matemàtica moderna.

En el cas general la situació és força més complicada i ens restringirem només a les equacions de segon grau *homogènies i de discriminant 1.* Es va veure que hi havia un cas senzill que és el de les equacions *indefinides*, és a dir, aquelles que prenen valors positius i negatius, i un cas difícil, el de les equacions *positives*, que prenen només valors positius, com per exemple $x^2 + y^2 + z^2$. La situació respecte d'aquestes era molt curiosa: D'una banda no se sabien classificar. D'altra banda no se'n coneixia cap llevat de l'esfera $x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Calia buscar algun exemple d'equació homogènia de discriminant 1, positiva i no equivalent a l'esfera. Es va demostrar que, si n'hi havia alguna, hauria de tenir, al menys, 8 variables. Korkine i Zolotareff van trobar-ne una amb 8 variables:

$$2(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 - x_4x_5 +$$

$$x_5^2 - x_5x_6 + x_6^2 - x_6x_7 + x_7^2 - x_5x_8 + x_8^2).$$

Aquesta equació, encara que no ho sembli, és ben excepcional: va ser la primera equació homogènia positiva de discriminant 1 que pren només valors parells. Korkine i Zolotareff van publicar el seu resultat a Mathematische Annalen, la revista de més prestigi a l'època. Poc s'imaginaven, miserables mortals, que acabaven d'entreveure la primera empremta del totpoderós E_8.

2 Una certa configuració geomètrica

És difícil trobar, a primera vista, res d'extraordinari en l'equació anterior. Per tal de copçar-ne el significat, la convertirem en una certa configuració geomètrica, més entenedora. Una equació de segon grau en n variables, positiva, es pot representar gràficament de la següent manera: Prenem, en un espai de dimensió n, un vector per cada variable, de manera que:

1) la longitud del vector v_i és l'arrel quadrada del coeficient de x_i^2;

2) l'angle entre v_i i v_j és tal que el producte escalar de v_i i v_j és la meitat del coeficient de x_ix_j.

Posem algun exemple:

$x^2 + y^2$	: dos vectors ortonormals.
$x^2 + xy + y^2$	: dos vectors de longitud 1 formant un angle de 60 graus.
$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz$	: tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, de longitud 1 tals que $\vec{u}$, i $\vec{w}$ són ortogonals i $\vec{v}$ forma amb $\vec{u}$ i $\vec{w}$ angles de 120 graus.

etc.

Però, són sempre possibles aquestes combinacions? En els tres exemples anteriors és clar que sí

És molt fàcil de veure que el fet que la configuració sigui construïble és equivalent a que l'equació pren només valors positius! Això ens permet representar l'equació de Korkine i Zolotareff com una configuració de 8 vectors en dimensió 8, de longitud 1 i formant entre ells angles de 90 i 120 graus. Com que dibuixar vectors en dimensió 8 és poc pràctic, aquesta configuració es representa així:

Cada vèrtex representa un vector. Si dos vèrtex no estan units, els vectors són ortogonals. Si ho estan, els vectors formen un angle de 120 graus. D'aquest diagrama se'n diu el *diagrama de Dinkin* de E_8. Els vectors corresponents són el *sistema d'arrels de* E_8. Aquest sistema d'arrels ens dóna, per tant, un paral.lelepípede en 8 dimensions, de volum 1, tal que totes les arestes són de longitud $\sqrt{2}$ i tots els angles són de 60, 90 o 120 graus. Un objecte ben remarcable!

3 Les 27 rectes, un grup simple i un políedre

Una equació de segon grau representa, en el pla, una cònica. A l'espai, una equació de segon grau representa una superfície anomenada *quàdrica*. La quàdrica més senzilla de representar és l'esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Una altra quàdrica relativament senzilla de construir és l'hiperboloide reglat

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1.$$

Per la pròpia construcció veiem que per cada punt d'aquest hiperboloide podem dibuixar dues rectes totalment contingudes a l'hiperboloide. D'aquí li ve el nom de *reglat*. De fet, aquesta és una propietat comuna a totes les quàdriques, fins i tot l'esfera: el que succeeix és que les rectes contingudes a l'esfera són imaginàries.

Si ara passem de les equacions de segon grau a les de tercer, veiem que les superfícies de tercer grau, o *cúbiques*, tenen una propietat extraordinàriament sorprenent: una cúbica conté sempre 27 línies rectes, ni una més ni una menys! És més, la *configuració* que formen aquestes 27 rectes és sempre la mateixa, independentment de quina cúbica considerem. Aquí la paraula configuració s'utilitza per indicar la manera com aquestes 27 rectes es tallen entre si.

La configuració de les 27 rectes d'una cúbica va ser molt estudiada el segle passat. En particular, es va veure que el seu grup de simetria és un grup lineal finit que conté el grup de permutacions de sis elements i que té un subgrup d'índex dos que és simple. Burnside, cap al 1911, estudiava grups simples finits i pensava obtenir-ne de nous a partir del grup de permutacions de n elements, de la mateixa manera que el grup de permutacions de 6 elements produeix el grup de simetria de les 27 rectes d'una cúbica. El que va veure, però, és que aquesta construcció no era possible gairebé mai, amb tres úniques excepcions en dimensions 6, 7 i 8. En particular, Burnside obté el que ell creu que és un nou grup lineal finit en 8 variables, un grup que té

$$696.729.600$$

elements i que diu ell que "no sembla haver estat fins ara reconegut". Avui sabem que aquest és el grup de Weyl de E_8, és a dir, el grup de simetria del sistema d'arrels de E_8, del qual hem parlat abans. També sabem que Burnside només estava encertat a mitges reclamant la prioritat d'aquest nou grup lineal. En efecte, ja feia uns anys que Gosset (que no era pas matemàtic professional) s'havia dedicat a l'estudi de políedres semi-regulars en dimensions superiors a 3, en un exemple clar del que molts devien considerar una elucubració inútil. Gosset va veure que la bella multiplicitat de les 5 formes regulars a que estem acostumats en dimensió 3 no té paral.lel en dimensions superiors: en dimensió més gran que quatre els únics políedres regulars són el cub, el tetràedre i l'octàedre... però en dimensió 8, estranyament, Gosset va ser capaç de construir un cert políedre semi-regular, el grup de simetria del qual té 696.729.600 elements... E_8 s'estava manifestant novament.[1]

[1]Posteriorment es va veure que aquest grup s'identifica també al grup de simetria de la configuració formada pels 120 plans tritangents a la corba de sisè grau formada per la intersecció d'una quàdrica i un con quàrtic.

4 Sis monedes i dotze boles

El 1694 Newton i Gregory (el descobridor de la fórmula de Taylor) discutien un problema que devia semblar ben fútil: Newton argumentava que només poden col.locar-se 12 esferes tangents a una de central, mentre que Gregory observava que la demostració de Newton no era concloent i no estava clar que una tretzena esfera no pogués encabir-s'hi.

Tots sabem que el nombre màxim de monedes tangents a una moneda central és 6. És clar que no resta lloc per a una setena moneda degut a que les sis que ja hem col.locat són tangents entre sí. El cas de les esferes és una mica més subtil (les 12 esferes poden no tocar-se) i, de fet, les demostracions de que el nombre màxim és, realment, 12, no són pas trivials.

Què succeeix en dimensió 4? Sabem col.locar 24 esferes en un espai de dimensió 4 tangents a una esfera central. Sabem que no se n'hi poden col.locar 26, però ningú no sap si n'hi podria haver 25. En dimensió 5, sabem col.locar-ne 40 i sabem que 47 no hi caben, però tampoc no es coneix el nombre màxim d'esferes tangents a una esfera, com tampoc no es coneix aquest nombre en *cap* dimensió superior a 3... llevat de en dimensió 8 i en dimensió 16.

En efecte, en dimensió 8 sabem que, com a màxim, podem col.locar 240 esferes tangents a una esfera central. Ara bé, el sistema d'arrels de E_8 conté 240 vectors de longitud mínima que ens donen una manera efectiva de disposar 240 esferes tangents a una de donada! En dimensió 24 apareix un objecte geomètric apassionant, una mena de *super*-E_8, que ens permet col.locar 196560 esferes tangents a una de donada. En ambdós casos tenim el nombre màxim possible.

Aquest problema està molt relacionat amb un altre problema geomètric clàssic: es tracta d'empaquetar esferes iguals de la manera més densa possible. En el cas de dimensió 2 l'empaquetament més dens possible s'obté col.locant les esferes (que ara són discos) segons la disposició hexagonal ordinària. Novament és E_8 qui ens permet empaquetar esferes en un espai de dimensió 8 d'una manera extraordinàriament densa, propera al límit màxim teòric. Em preguntareu: A qui pot interessar saber com empaquetar esferes en un espai de dimensió 8? Abans de contestar aquesta pregunta voldria que escoltéssiu una certa música.

5 Mozart en versió digital

Escoltem un enregistrament digital d'una sonata de Mozart i ens sembla estar escoltant Mozart. Però l'adjectiu *digital* ens indica que, en algun moment entre l'orquestra i nosaltres, la música que estem escoltant s'ha convertit en una sèrie de zeros i uns. Com pot ser que el resultat final sigui tant semblant a la música en viu? Per entendre-ho, ens cal parlar una mica d'anàlisi harmònica.

Suposem que volem enregistrar un cert *senyal* $y = f(t)$

Via Fourier, podem descompondre aquest senyal en els seus harmònics.

Com que la sensibilitat de l'oida és limitada, ens és permès de negligir els harmònics de freqüència superior a una certa cota $\omega/2$. En aquestes condicions hi ha un teorema que diu que la funció f està unívocament determinada pels seus valors en els instants n/ω. És a dir, conèixer f és equivalent a conèixer

$$f(0), f(1/\omega), f(2/\omega), \dots \qquad (*)$$

i podem reduir la música de Mozart a una successió de nombres reals. Voldria recalcar que no estem fent cap aproximació, sinó que la successió $(*)$ determina *exactament* f i no hi ha cap pèrdua d'informació si ens quedem només amb els valors de f cada $1/\omega$ segons.

Quan si que es produeix una pèrdua d'informació és quan volem transformar una successió de nombres reals en una successió de zeros i uns. Una manera elemental de *digitalitzar* seria substituir els nombres reals per la seva part entera escrita en base 2. És clar que aquest procés introdueix un error important. Zador, al 1963, va demostrar que aquest error pot reduir-se prenent digitalitzacions de dimensió superior. Això vol dir el següent: en lloc de digitalitzar cada nombre de $(*)$, esperem primer a tenir-ne n. Aleshores, els representem per un punt X en un espai de dimensió n. En aquest espai, haurem escollit prèviament una sèrie de punts $\{x_i\}$ i ara substituirem X per aquell punt d'entre els x_i que li sigui més proper. Quina és la manera òptima d'escollir els punts $\{x_i\}$? Cal prendre els centres de les esferes d'un empaquetament el més dens possible. Així, per exemple, un dels millors digitalitzadors coneguts és el que utilitza els vectors d'un sistema d'arrels de E_8, en dimensió 8. Tinc entès que ja hi ha alguns *modems* al mercat que l'utilitzen.

Els empaquetaments d'esferes en dimensions elevades, un tema que fa pocs anys podia ser el paradigma de la recerca erudita i inútil, ara omple les pàgines de les revistes d'enginyeria electrònica.

6 Grups continus de simetries

Considerem les simetries d'un icosàedre: formen un grup *discret*. En canvi, un objecte com ara l'esfera té un grup de simetria infinit i *continu*. Les simetries de l'esfera, que són les reflexions i les rotacions d'angle arbitrari respecte de qualsevol eix, formen el *grup de Lie* $O(3)$.

Killing, ara fa cent anys, va desenvolupar una classificació de tots els grups de Lie compactes simples. Va veure que n'hi ha ben pocs. En primer lloc, hi ha el grup de moviments de l'espai euclidià de n dimensions i els seus anàlegs sobre els complexos i els quaternions. Però, a més d'aquestes 3 famílies infinites, Killing va descobrir que hi havia 5 grups de Lie *excepcionals*, que va anomenar G_2, F_4, E_6, E_7 i E_8, de dimensions 14, 52, 78, 133 i 248, respectivament. Més endavant es va veure que aquests grups excepcionals provenien de certes geometries de dimensió baixa sobre una àlgebra ni commutativa ni associativa anomenada els *nombres de Cayley*.

Quina relació hi ha entre el grup de Lie E_8, de dimensió 248, i les estructures que hem estat veient fins ara, essencialment discretes? No és pas fàcil de respondre a aquesta pregunta, però podem pensar que E_8 és un grup de simetries que conté 8 rotacions que commuten entre sí. Aleshores, E_8 actua com a simetries d'aquestes rotacions i els vectors propis d'aquesta acció formen un sistema d'arrels de tipus E_8 en un espai de 8 dimensions. Resumint: l'estructura discreta E_8 en dimensió 8 controla el gegantí grup de Lie E_8, de dimensió 248.

7 Conclusió

Després de Killing, Cartan i Chevalley, E_8 s'ha fet més assequible als mortals. Ara són multitud els qui l'estudien des de tots els punts de vista imaginables. Fins i tot se l'està invocant, a la teoria de les super-cordes, perquè faci realitat el vell somni de donar una formulació unitària a les quatre forces de la natura. Sembla omnipresent, però aquesta omnipresència no ens ha d'estranyar: E_8 és una estructura bàsica del nostre univers lògic, com puguin ser-ho els grups cíclics, els cossos finits, els nombres primers o la circumferència. No podem defugir la seva presència, la seva influència. E_8 representa una estructura extraordinàriament simètrica en un món de 8 dimensions, un estrany cristall perfecte: més d'un segle d'estudis no han esgotat la dilucidació de les seves propietats.