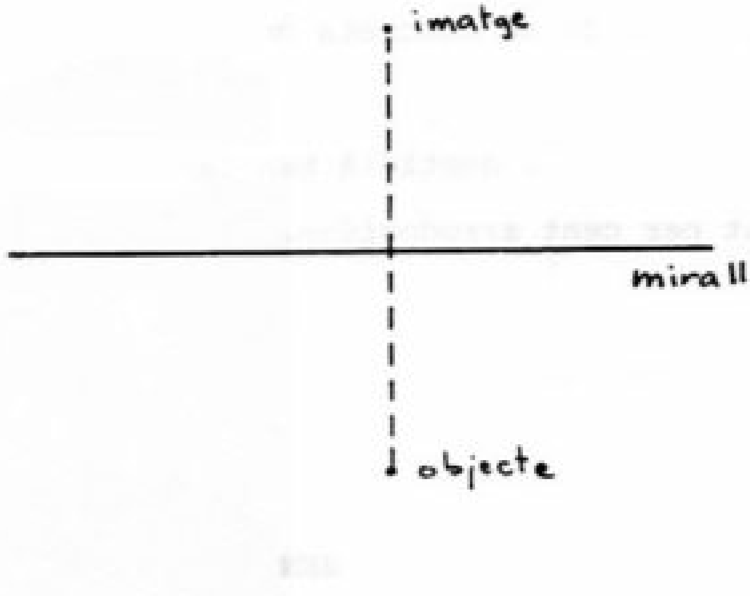
MIRALLS, CALIDOSCOPIS i POLÍEDRES*

J. Aguadé

Agreixo l'oportunitat que m'heu ofert de poder parlar d'uns objectes que sempre m'ham fascinat, com són els miralls, els calidoscopis i els políedres.

1.- Miralls

Comencem parlant de *miralls*. Un mirall no és res massa espectacular. Li posem un objecte al davant i ens en dóna una imatge. Si ens hi posem nosaltres al davant dóna una imatge nostra i la imatge de la nostra imatge tornem a ser nosaltres.



* Lliçó inaugural del curs 1983-84 a la Secció de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona.

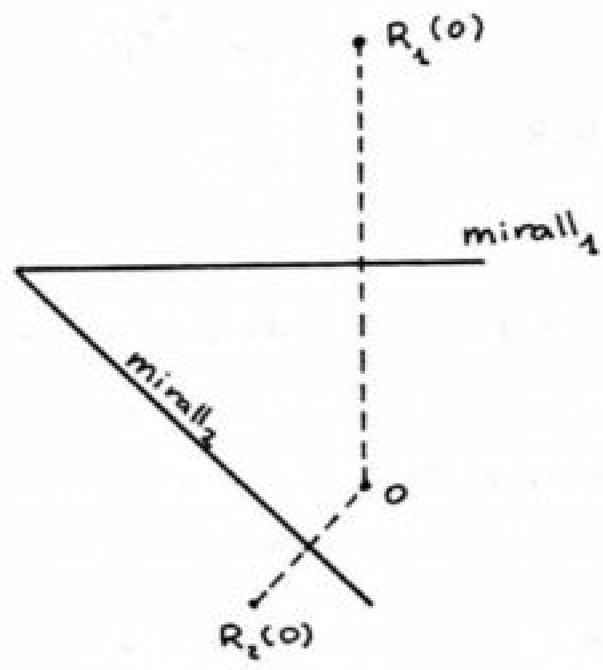
Aquest mirall produeix una transformació R del món, d'ordre 2 :

$$R^2 = 1$$

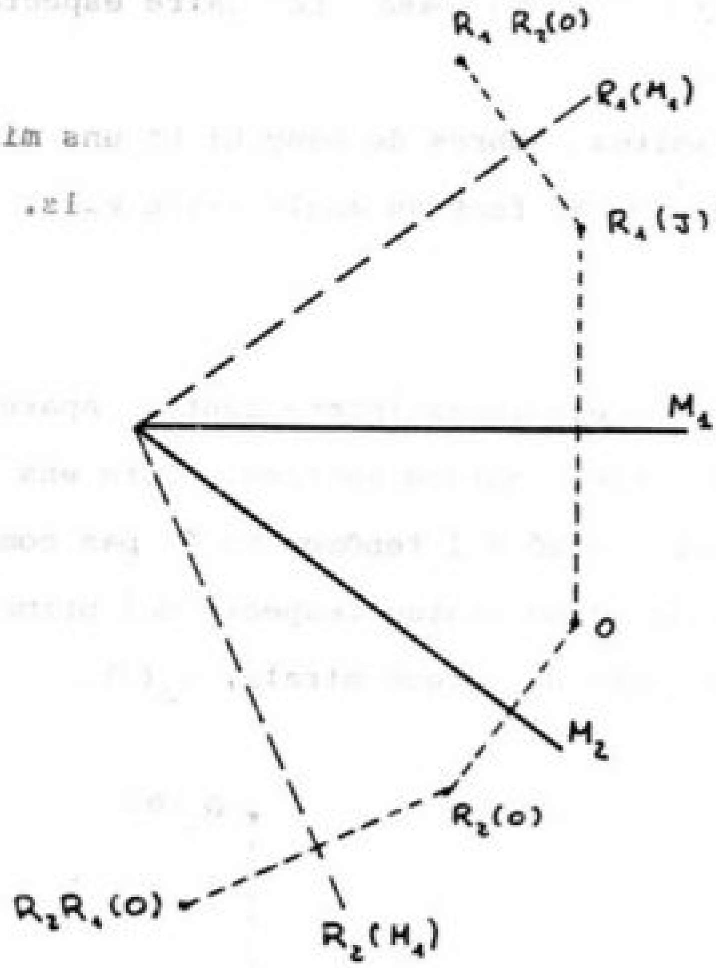
Es una *reflexió*. No pasa res gaire espectacular.

Ara bé, a moltes cambres de bany hi ha uns miralls articu - lats que es poden posar fent un angle entre ells. Fem-ho. Que passa?

Comencen a succeir coses interessants. Apareixen, no una ni dues, sinó diverses imatges nostres. Tots ens hi hem fixat algun cop. L'explicació del fenòmen no és pas complicada. En primer lloc, produim una imatge respecte del primer mirall, $R_1(J)$ i una imatge respecte del segon mirall, $R_2(J)$:



Ara bé, el propi mirall$_2$ produeix una imatge seva respecte del primer mirall, i el mateix passa amb el mirall$_1$. Aleshores, $R_1(J)$ i $R_2(J)$ produeixen imatges respecte d'aquests miralls virtuals , $R_2R_1(J)$, $R_1R_2(J)$:



Ara observem que hi ha dues possibilitats:

1) L'angle que formen els dos miralls és *submúltiple de* π. Aleshores, només es forma un nombre finit d'imatges diferents. Arriba un moment en que

$$R_2R_1R_2R_1 \ldots R_2R_1J = R_1R_2R_1R_2 \ldots R_1R_2J$$

Hem construit un *calidoscopi*.

2) L'angle que formen els dos miralls *no* és submúltiple de π.

En aquest cas, les successives imatges no arriben mai a coincidir i apareixen *infinites* imatges diferents.

Tot això, matemàticament es veu molt clar, però jo no recordo haver-me trobat mai en el cas d'obrir un dels miralls de l'armari del bany i veure infinites imatges meves. Què és el que passa ? Fem l'experiment: obrim un dels miralls. No cal fixar-se en l'angle: la probabilitat que sigui un submúltiple de π és zero. Veurem, diguem, 4 imatges nostres: una a cada mirall, i dues de més juntes i potser incompletes cap a la banda on els miralls s'articulen. On són les altres infinites imatges? Hi són, però no les veiem. Per veure-les, caldria *atravessar el mirall*. La situació és aquesta: jo veig 4 imatges meves. La meva imatge No. 1 també en veu 4, d'imatges seves (i per tant meves), però *no són les mateixes que jo veig*. I cada una d'aquestes successives imatges en veu de noves , i així successivament.

Resumint: Cada cop que obrim un mirall, a no ser que prenguem la sana precaució d'obrir-lo un angle $\frac{\pi}{n}$, estem produint una infinitat d'imatges nostres, que no veiem, ni es veuen totes entre elles.

Fugim d'aquest malson i tornem, com cal, al cas 1: Si col.loquem dos miralls formant un angle $\frac{\pi}{n}$, obtenim un calidoscopi que ens dóna 2n imatges de cada objecte que posem entre els dos miralls.

És clar que en lloc de miralls a l'espai, podem considerar igualment que som al pla i prenem reflexions respecte de dues rectes.

Les reflexions respecte de dues rectes generen un grup de transformacions del pla. com que hem pres la precaució que els miralls formin un angle commensurable amb π, cada punt dóna lloc a un nombre finit d'imatges, és a dir, el grup de transformacions és un grup finit. És un grup finit generat per reflexions de $\mathbb{R}^2$. Diem que és un *grup finit de reflexions*. Quina estructura té aquest grup? És molt senzilla: està generat per dos elements R_1 i R_2 que són reflexions, per tant,

$$R_1^2 = R_2^2 = 1$$

i el producte és tal que, fent-lo n vegades, ens dóna la identitat:

$$(R_2R_1)^n = 1$$

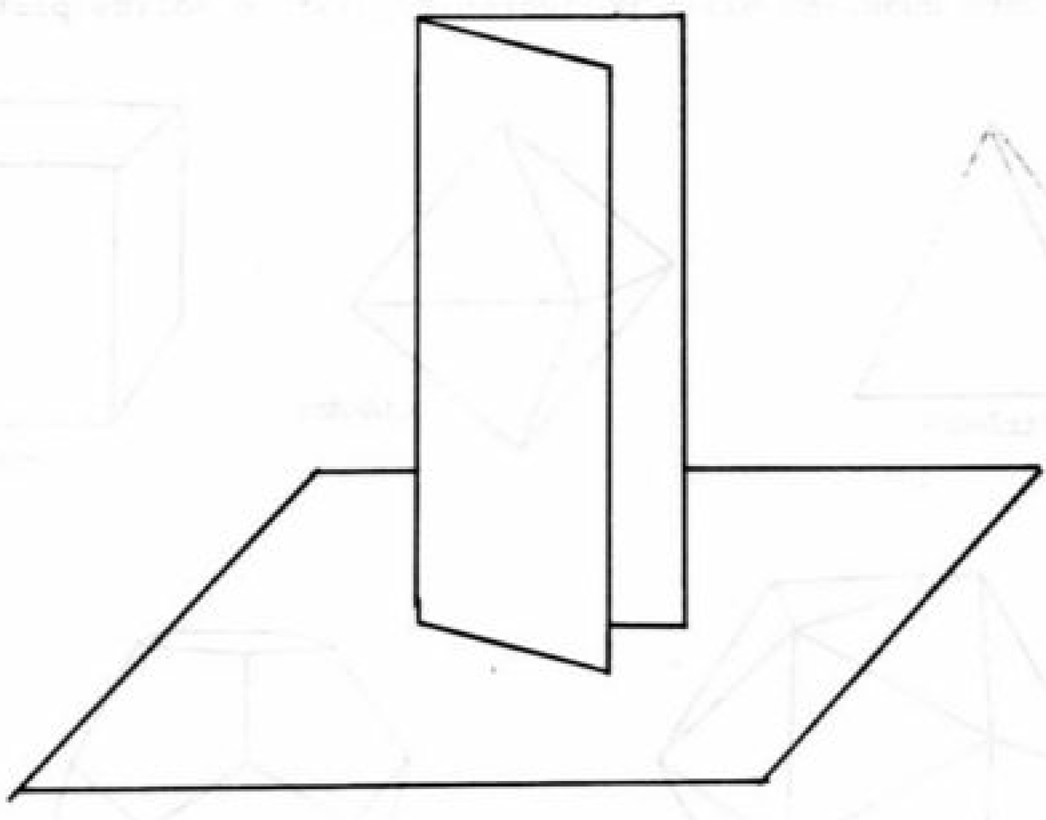
Aquest grup s'anomena el *grup dièdric* D_n i és evident que coincideix amb el grup de simetria d'un polígon regular de n costats. Es a dir, per cada polígon regular tenim un grup finit de reflexions del pla, i, per tant, un calidoscopi.

Podem ara preguntar-nos si hi ha *altres calidoscopis*, a més dels que acabem de descriure. Ens estem preguntant si podem disposar una família de miralls verticals de manera que cada punt doni lloc a un nombre finit d'imatges. Dit d'una altra manera : Quins són els grups finits de reflexions del pla?

Sembla ser que aquest problema va ser considerat per Leonardo da Vinci, que estudiava els possibles grups de simetria d'edificis. Podem, per tant, anomenar *teorema de Leonardo da Vinci* l'afirmació que *els únics grups finits de reflexions del pla són els grups dièdrics.* És a dir, no hi ha cap altre calidoscopi *pla.*

Donem ara un pas més enllà. Suposem que en lloc de voler construir un calidoscopi pla, volem construir un calidoscopi de 3 dimensions. Tenim miralls reals i els volem combinar d'alguna determinada manera per tal que produeixin un nombre finit d'imatges.

Una manera òbvia d'actuar és agafar un calidoscopi dels d'abans i col.locar-li un tercer mirall perpendicular als altres dos:

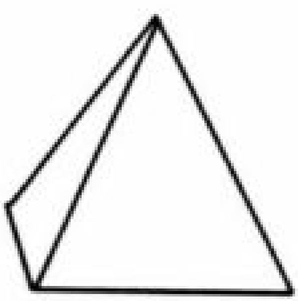


Si el calidoscopi inicial donava $2n$ imatges, aquest en dóna, evidentment, 4n . Però és un exemple més aviat trivial . Com si diguéssim, és un calidoscopi format de dos calidoscopis independents; el dels dos mirallas verticals i el calidoscopi trivial format per un sol mirall horitzontal. El grup de transformacions corresponent és el producte cartesià del grup dièdric i un grup amb un únic element no trivial d'ordre dos.

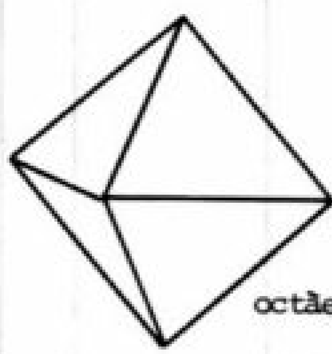
Anem a cercar exemples més interessants. Ens caldrà recó - rrer als *políedres regulars*.

2.- Políedres

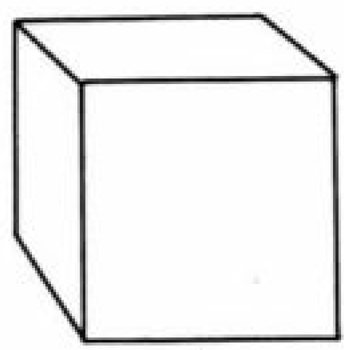
Tots coneixem els 5 políedres regulars o sòlids platònics:



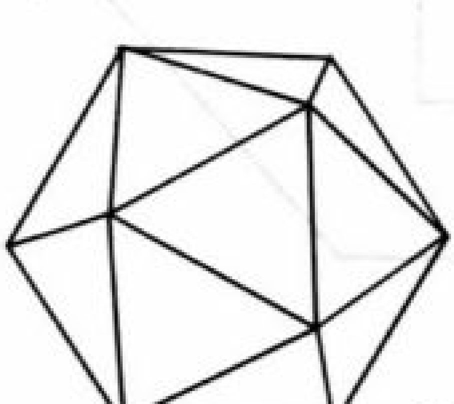
tetràedre



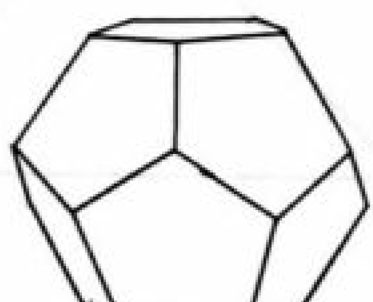
octàedre



cub



icosàedre



dodecàedre

Parlem-ne una mica. Euclides, al seu llibre XIII, demostra que existeixen 5 polïedres regulars, els construeix, els estudia i també demostra que no n'hi ha cap altre. És, potser, el primer teorema de classificació de la història. Potser va ser aquest fet fascinant de la finitud del nombre de polïedres regulars el que va fer que els matemàtics grecs s'hi sentissin tan atrets. Hi ha qui opina que els "Elements" no pretenen ser un compendi de Geometria, sinó que són un estudi dels sòlids platònics, amb una llarga introducció. És, potser, una exageració, però no deixa de tenir un cert sentit. En tot cas, podem dir que als elements d'Euclides ja apareix la teoria completa dels 5 sòlids platònics. Qui els va descobrir per primer cop? Potser preguntar-se això és com voler saber qui va ser el primer que va encendre foc.

Mirem, en primer lloc, al voltant nostre, a la recerca de models naturals dels 5 polïedres. De fet, apareixen tots 5 a la natura, si bé un d'ells d'una manera molt poc evident. El tetràedre, el cub, l'octàedre i el dodecàedre apareixen en forma de cristalls de minerals no gaire rars , i decididament disponibles a la Grècia clàssica. En canvi, sembla molt difícil poder observar un icosàedre a la natura. Hi ha certs esquelets de radiolaris que tenen forma d'icocàedre, però són microscòpics. Cal concloure que no sembla pas que l'iccsàedre pugui ésser descobert per simple observació de la natura i és per això que l'icosàedre se'ns presenta com el més enigmàtic dels sòlids platònics (El títol inicial d'aquesta xerrada era "La vida secreta dels icosàedres"...) *

* Si ens deixem endur per la imaginació podriem veure la fabricació del

Diuen que un dels pitagòrics va assimilar els primers 4 sòlids (cub, octàedre, tetràedre i icosàedre) als 4 elements, i en el descobriment del cinquè sòlid platònic va veure-hi la confirmació de l'existència d'una substància superior, que necessàriament contindria les altres.

La història, però, dels sòlids platònics, és molt fosca. Sabem que Plató els coneixia. Sabem que a unes excavacions al S. d'Itàlia es va trobar un dodecàedre artificial, possiblement una joguina, utilitzada cap al 500 abans de Crist. En canvi, no tinc notícia que s'hagi descobert cap dels sòlids (diferents del cub, és clar) a Egipte ni a Messopotàmia. Es trobarà a les peces encara no llegides del Museu Britànic una descripció babilònica del dodecàedre?

Els dos testimonis que tenim sobre la història dels 5 sòlids es contradiuen. *Proclus* va dir que van ser descoberts pels pitagòrics. No sabem si és cert i hi ha motius per dubtar-ne. Cal, però, ésser molt caute. Pensem que es conta que Hippasus va ser condemnat pels déus per atribuir-se ell mateix el dodecàedre, en lloc de reconèixer que era obra de Pitàgoras.

La base més ferma per atribuir els sòlids platònics és, però, el propi Euclides, el qual, a un "escolium" del seu llibre

primer icosàedre com un acte gairebé màgic: el matemàtic-demiurg afegeix al món un objecte nou, previst per les lleis de simetria de l'Univers, pero no existent, el darrer objecte que mancava per completar la sèrie dels 5 únics...

XIII diu, referint-se als 5 sòlids:"... s'anomenen platònics, però no són d'en Plató. Cub, piràmide i dodecàedre són dels pitagòrics. Octàedre i icosàedre pertanyen a *Theaetetus*". La característica fonamental d'aquesta afirmació és que és *increïble* i això és el que fa pensar que deu ser certa. És increible per dos motius :

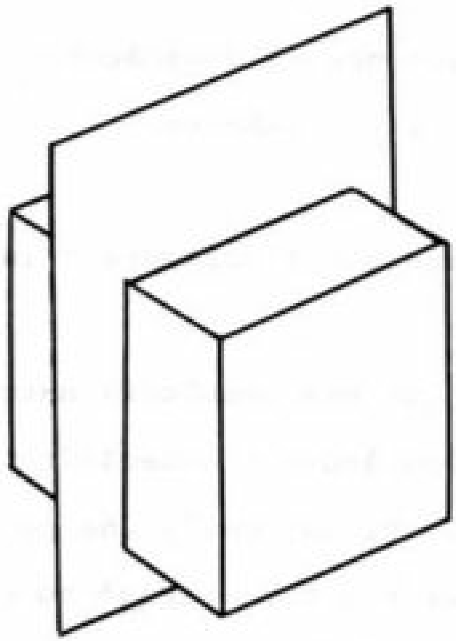
1) Costa de creure que el dodecàedre s'inventés molt abans de l'octàedre i l'icosàedre.

2) Costa de creure que l'octàedre s'inventés tan tard.

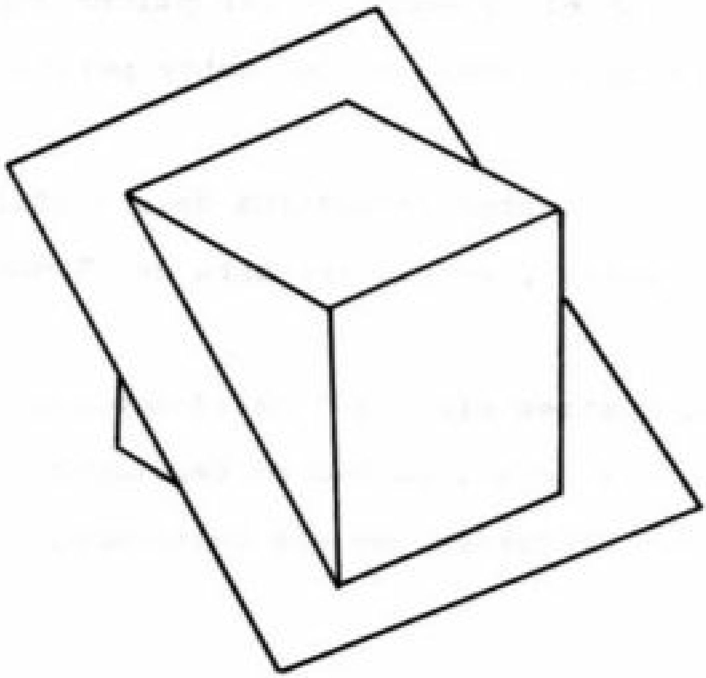
(L'ordre "naif" que ens semblaria natural seria: cub → tetràedre → octàedre → icosàedre → dodecàedre, o potser invertint els dos últims llocs). Hi ha, però, una possible explicació: l'octàedre va aparèixer tan tard perquè no es tractava d'imaginar l'existència d'un octàedre (ben segur que els egipcis ja ho havien fet!) sinó que es tractava de veure en l'octàedre alguna qualitat interessant. És a dir, calia, abans, inventar el concepte de *políedre regular*. (No va pas descobrir el primer nombre perfecte aquell que el va escriure per primer cop, sinó el primer que va inventar el *concepte* de nombre perfecte).

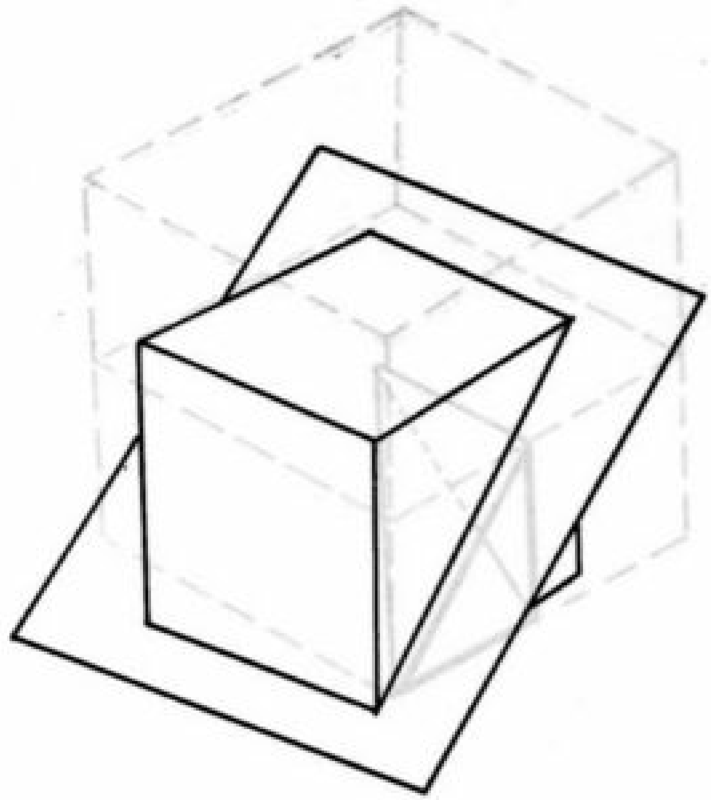
En tot cas, la teoria matemàtica dels 5 sòlids, tal i com apareix als "Elements", sembla ser obra de Theaetetus.

Tornem als nostres miralls i calidoscopis. Quina relació hi ha entre calidoscopis i políedres regulars? Estan certament molt relacionats. Recordem que els calidoscopis plans generaven el grup de simetria d'un polígon regular. Considerem ara un políedre regular, per exemple el cub, i considerem el seu *grup de simetria*, es a dir, el grup de totes les transformacions de l'espai que deixen invariant el cub com a un tot (no pas cada punt del cub!). Per exemple, la reflexió respecte d'un pla vertical com ara aquest:



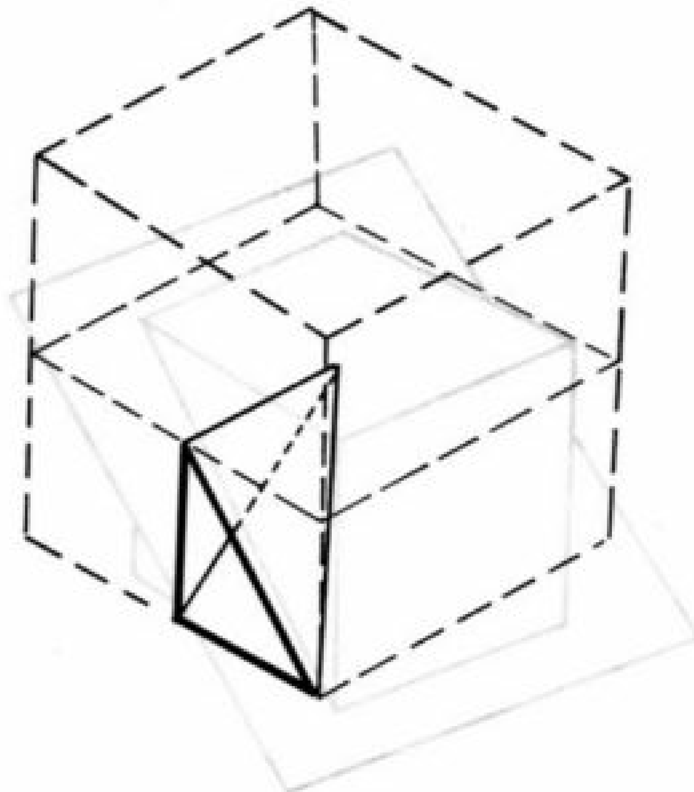
Per exemple, les reflexions respecte plans que passen per dues arestes oposades, com ara:





És fàcil veure que aquestes tres reflexions generen el grup de simetria del cub, B_3 . Per tant, el grup de simetria del cub és un *grup finit de reflexions* tal i com ho era el grup de simetria d'un polígon, però ara en *dimensió 3* . Ara bé, un grup finit de reflexions ès un *calidoscopi*. Hem construït un *calidoscopi cúbic* on cada objecte produïria 48 imatges, degut a que 48 és l'ordre del grup de simetria del cub.

A la pràctica es fabricaria el calidoscopi de la manera següent: Prendríem 3 triangles de dimensions convenients de metall ben reflectant (millor que no pas de vidre) i els col.locaríem formant un triedre, corresponents als tres plans de simetria del cub. Si col.loquem un objecte a l'interior del triedre, produirà 48 imatges. Oi que és magnífic?



El que hem fet amb el cub por fer-se amb els altres polfedres regulars. Si considerem el grup de simetria d'un polfedre regular veiem que està generat per 3 reflexions i que si col.loquem 3 miralls corresponents a aquestes reflexions, obtenim un calidoscopi. Ara bé, d'aquesta manera només s'obtenen 3 calidoscopis diferents. En efecte, el cub i l'octàedre d'una banda i el dodecàedre i l'icosàedre d'una altra, tenen el mateix grup de simetria, perquè son dues parelles de polfedres *duals* un de l'altre. Obtenim, doncs, 3 calidoscopis:

- el *tetraèdric* , corresponent al grup A_3 , on cada punt té 24 imatges.

- el *cúbic* , corresponent al grup B_3 , on cada punt té 48 imatges.

- l'*icosaèdric* ,"el més gran del món", corresponent al grup I_3 de simetria de l'icosaèdre, on cada punt té 120 imatges. *

Hi ha més calidoscopis? Dit d'una altra manera, hi ha altres grups finits de reflexion a $\mathbb{R}^3$, a més del que hem estat considerant? La resposta és *no*, i podem demostrar-ho de la següent manera:

Suposem que, amb una sèrie de miralls, fem un calidoscopi a $\mathbb{R}^3$. És evident que, si considerem el centre de masses de totes les imatges d'un punt (incloent-lo a n'ell), obtenim un punt de l'espai que té per imatge ell mateix, respecte de tots els miralls. Per tant, és a la superfície de cada un dels miralls i això ens diu que els miralls es tallen en un punt. Prenem l'esfera de radi 1 de centre aquest punt i considerem, sobre l'esfera, els miralls i tots els *miralls virtuals* que apareixen. Obtindrem una configuració de cercles màxims sobre l'esfera, que la descompondrà en un nombre finit de regions poligonals congruents entre sí. Els angles interns de cada una d'aquestes regions seran submúltiples de π, perquè si no fos així, hi hauria, a l'interior de la nostra regió, un nou mirall virtual. En particular, cada una de les regions no pot tenir

* Deixant de banda el problema tècnic, la construcció d'un calidoscopi icosaèdric és ben senzilla. El lector interessat pot trobar indicacions concretes sobre la forma dels miralls a la pàgina 24 del "gran" llibre d'en Coxeter "*Regular Complex Polytopes*". S'imagina el lector l'efecte que faria un calidoscopi d'aquests, de la mida d'una habitació?

més de 3 costats i, deixant a part casos trivials, tindrem l'esfera dividida en triangles congruents. Siguin $\frac{\pi}{a}$, $\frac{\pi}{b}$ i $\frac{\pi}{c}$ els seus tres angles. Com que estem sobre una esfera, la suma dels 3 angles d'un triangle és estrictament més gran que π, per tant, a, b, c cal que siguin tals que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1 .$$

D'aquí es poden deduir els possibles valors de a, b, c i veure que corresponen als calidoscopis que hem discutit abans.

3.- Calidoscopis de dimensió n

Un cop classificats els calidoscopis del pla i de l'espai, la pregunta natural és: Quins calidoscopis hi ha a $\mathbb{R}^n$? Dit en termes més matemàtics: Quins són els grups finits de reflexions de $\mathbb{R}^n$?

Aquests grups estan totalment determinats. Són els anomenats *grups de Coxeter* finits. És clar que ara no podem donar els detalls de la demostració que condueix a la classificació dels grups de Coxeter finits, però si que donarem la *llista completa* d'aquests grups, és a dir, la llista completa dels calidoscopis de dimensió n . (És clar que només farem esment dels grups *irreduïbles*).

En primer lloc, hi ha els grups de reflexions associats a po líedres regulars:

A *dimensió 2* tenim el grup dièdre D_n , d'ordre $2n$, que és el grup de simetria del polígon regular de n costats.

A *dimensió 3* tenim el grup de simetria del tetràedre, A_3, d'ordre 24, el del cub. B_3 , d'ordre 48 i el de l'icosàedre , I_3 d'ordre 120.

A *dimensió 4* hi ha 6 políedres regulars: el *tetràedre*, el *cub* i el seu dual, unpolíedre anomenat la *24-cel.la* , que té 24 vèrtex, 96 arestes, 96 cares i 24 hipercares i és auto-dual, i finalment, un políedre anomenat la *600-cel.la* i el seu dual, que són una mena d'anàlegs tetradimensionals del dodecàedre i l'icosàedre. Corresponents a aquests políedres tindrem grups finits de reflexions: A_4 , d'ordre 120 , B_4 , d'ordre 394, F_4 d'ordre 1.152 i I_4 , d'ordre 14.400.

A *dimensió 5* i a totes les dimensions ≥ 5 no hi altres políedres regulars que el tetràedre, el cub i el dual del cub. Per tant, obtenim grups A_n i B_n per a tot n .

Tenim ja tots els grups de Coxeter associats a políedres regulars. El cas és que hi ha encara altres calidoscopis no associats a políedres regulars. Són els següents: En primer lloc, a partir de dimensió 4 apareixen uns grups de Coxeter C_n d'ordre $2^{n-1}n!$ A més, apareixen 3 casos isolats, en dimensions 6, 7 i 8 , anomenats E_6 , E_7 , E_8. Els ordres respectiusd'a -- quests grups *excepcionals* són:

grup	dimensió = No. de miralls	ordre
E_6	6	51.840
E_7	7	2.903.040
E_8	8	696.729.600

I no hi ha cap més grup finit de reflexions. Tenim, ja, una llista completa.

4.- Grups continus de transformacions

Fins ara hem parlat de grups *finits* de transformacions de l'espai. Ara considerarem un cas completament diferent (aparentment): parlarem de grups *continus* de transformacions. Posem un exemple. Hem vist que el grup de simetria d'un polígon regular de n costats és un grup finit de reflexions, el grup dièdric. Què passa si ara ens fixem en el grup de simetries d'una *circumferència* ? Tota *rotació* del pla (de centre el centre de la circumferència) deixa la circumferència invariant. El grup de simetria de la circumferència conté el *grup de les rotacions del pla* . Ja no és pas un grup *finit* , ni un grup *discret* , sinó que es tracta d'un exemple ben senzill de *grup continu* . Dit amb una nomenclatura més moderna, és un *grup de Lie* . D'altra banda, el grup de les rotacions del pla no és pas un grup gaire complex: con que tota rotació ve determinda pel seu angle de gir, és evident que el grup de les rotacions del pla és equivalent a la pròpia circumferència, S^1 . Hi ha, però, molts al tres exemples, com ara el grup de rotacions de l'espai de dimensió 3, o de l'espai de dimensió n, etc.

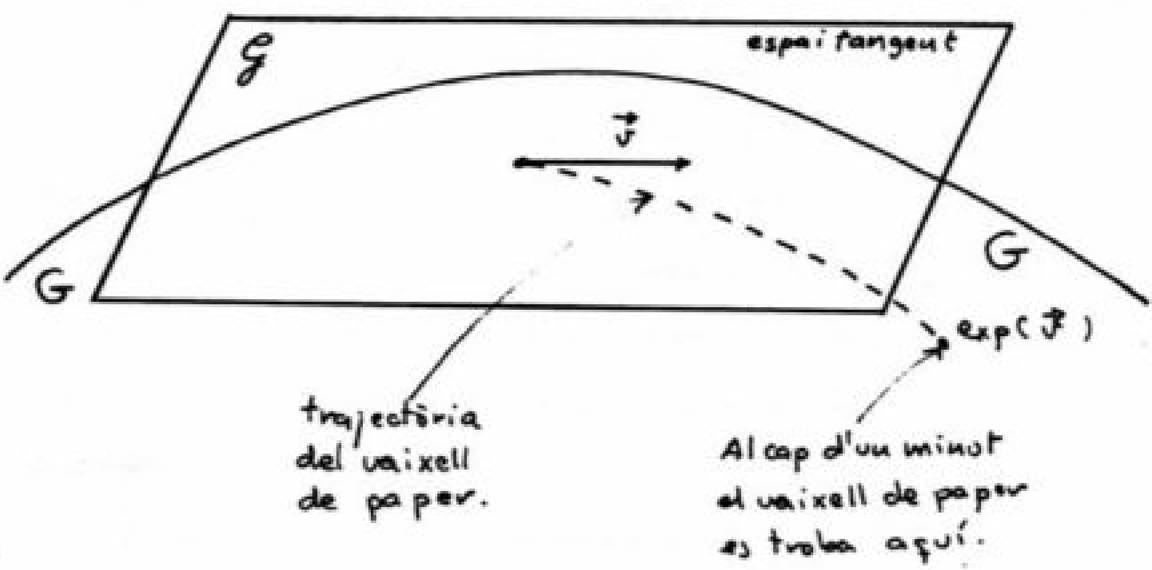
L'èxit total que hem assolit en la classificació dels grups de simetria finits ens fa desitjar obtenir alguna mena de teorema de classificació dels grups de simetria continus, és a dir, dels grups de Lie, però d'altra banda la tasca es presenta com a molt més complexa i no sembla que els nostres "jocs" amb miralls i polfedres ens hagin d'ésser útils quan ens enfrentem amb objectes "seriosos" com ara els grups de Lie.

De bell antuvi observem una propietat molt important dels gups de Lie: són espais *homogenis*. Això vol dir que, donats dos punts qualssevol, hi ha una manera *canònica* de passar de l'un a l'altre. En efecte, sigui x_o un punt qualsevol del grup de Lie G. Si considerem l'aplicació de G en ell mateix que multiplica cada element per x_o, tenim un *desplaçament* de tot l'espai que ens du l'element neutre de G al punt x_o. Anàlogament podriem trobar un desplaçament que ens dugués el punt x_o a qualsevol altre punt donat Y_o. L'existència d'aquests desplaçaments permet enviar a qualsevol punt de G, qualsevol cosa que tinguem a l'element neutre de G. Per exemple, suposem que tenim un *vector tangent* $\vec{v}$ a e (= element neutre de G). Pel que acabem de veure, podem traslladar $\vec{v}$ a qualsevol punt de G, per multiplicació. D'aquesta manera obtenim un *camp vectorial* sobre tot G. És a dir, un vector a e determina un *camp* a G.

Considerem ara *l'espai tangent* a G al punt e. És un espai vectorial que "s'aproxima" a C i "s'hi assembla". En el cas de grups de Lie, això és més cert que mai. En efecte, designem per $\mathfrak{g}$ l'espai tangent a G al punt e . Podem construir una aplicació, anomenada *aplicació exponencial*

$$\exp\colon \mathfrak{g} \to G$$

de la següent manera: Si $\vec{v}$ és un vector tangent , tal i com hem vist abans, $\vec{v}$ dóna lloc a un camp tangent sobre G . Podem pensar un camp tangent com un "corrent d'aigua" a G tal que a cada punt, la partícula d'aigua que hi ha al punt es mou amb la velocitat que indica el vector. Col.loquem un vaixell de paper en el punt e i el deixem que es mogui amb el corrent. El punt on es troba al cap d'un minut és, per definició, exp ($\vec{v}$).



Aquesta aplicació és, a un entorn del punt e , bijectiva , diferenciable i amb inversa diferenciable. Es diu que és un di-

feomorfisme local. El significat d'això és el següent: si volem estudiar *localment* els grups de Lie, (i el pas de local a global serà tasca a fer amb tècniques standard de topologia algebraica) podem reduir-nos a estudiar *multiplicacions a un entorn de l'origen de* $\mathbb{R}^n$, degut al fet que l'aplicació exponencial ens dóna una manera canònica de passar de l'espai tangent al grup de Lie.

Aquest estudi es presenta molt difícil. Pensem en quina és la situació: Tenim una multiplicació definida a un entorn de l'origen de $\mathbb{R}^n$, és a dir, una certa aplicació diferenciable.

$$f : U \to \mathbb{R}^n$$

$$U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

f és, doncs, una funció de $2n$ variables, a valors vectorials. No sembla pas fàcil estudiar aquestes funcions, ni molt menys arribar-les a classificar. Què lluny som (en aparença) dels nostres innocents "jocs" amb miralls i calidoscopis!

En aquest moment és quan es produeix *l'acte de geni* d'en *Sophus Lie:* Lie demostra que tota la informació sobre la multiplicació local f està continguda al *terme de segon ordre del desenvolupament de Taylor de la funció* $yx - xy$ *!* Aquesta és la idea genial d'en Sophus Lie, que ens ha de dur a una classificació dels grups continus de transformacions.

Anem a ser més precisos: Si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són vectors de $\mathfrak{g}$, definim: $[\vec{v},\vec{w}]$ = valor a $(\vec{v},\vec{w})$ del terme de segon ordre del de senvolupament de Taylor a l'origen de la funció:

$$U \times U \to \mathbb{R}^n$$

$$(x,y) \to xy - yx$$

Obtenim d'aquesta manera una aplicació bilineal

$$G \times G \to G$$

$$(\vec{v},\vec{w}) \longrightarrow [\vec{v},\vec{w}]$$

que compleix unes certes propietats algebraiques senzilles que no cal especificar ara. Un espai vectorial G , junt amb una aplicació bilineal com aquesta és, per definició, una *àlgebra de Lie*.

Donat un grup de Lie G , li acabem d'associar canònicament una àlgebra de Lie $\mathcal{G}$ i estem dient que aquesta estructura *essencialment lineal* determina l'estructura local (de caràcter *analític)* del grup de Lie A . Encara que sembli impossible! Per exemple: com podem recuperar la multiplicació de G a partir de l'àlgebra de Lie $\mathcal{G}$? Anem a donar una idea de com es pot fer. Recordem que tenim

$$\exp\colon \mathcal{G} \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow e^x$$

Siguin $x,y \in \mathcal{G}$ i considerem e^x, $e^y \in G$. Els podem multiplicar a G i buscar una antiimatge a $\mathcal{G}$ del producte $e^x . e^y$. És a dir, és lògic definir el producte de x i y com el vector z tal que

$$e^z = e^x . e^y$$

Normalment sabem que $e^x . e^y = e^{x+y}$, però si repassem la demostració d'aquest fet veurem que només és vàlida si x i y commuten , és a dir, si $xy = yx$. Si x i y no commuten, i posem $[x,y] = xy - yx$, es pot demostrar que existeix una expressió complicada en forma de sèrie infinita:

$$h(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}[[x,y],y] + \frac{1}{12}[[y,x],x] + \ldots$$

tal que

$$e^{h(x,y)} = e^x . e^y$$

Per la pròpia definició de h veiem que només intervé [,], és a dir, l'estructura d'àlgebra de Lie i per tant, $h(x,y)$ té sentit a tota àlgebra de Lie, sempre que la sèrie sigui convergent (i ho és a un entorn de l'origen). Per tant, si G és una àlgebra de Lie, podem definir, a un entorn de l'origen, un producte, de la següent manera:

$$x . y = h(x,y)$$

i hem recuperat, així, l'estructura local de grup de Lie que ja teníem.

Resumint: els teoremes de Lie van reduir l'estudi (local) dels grups de Lie a l'estudi d'uns objectes purament algebraics les àlgebres de Lie.

I aleshores van intervenir en Cartan i en Killing ...

5.- Àlgebres de Lie o el retorn dels calidoscopis.

Ens plantejem ara el problema de classificar les àlgebres de Lie. No podem pas entrar en els detalls, però si se'ns permet la comparació, té una mena de semblança amb una altra classificació que tot estudiant coneix: la classificació de les *còniques*. Tots recordem els diversos passos que ens duen a classificar les còniques sobre un espai vectorial: vectors isòtrops, plans hiperbòlics i espais el.líptics, descomposició de l'espai en suma ortogonal, etc. Ara tenim un problema similar, però més complex. Tenim un espai vectorial $\mathbb{R}^n$ i una aplicació bilineal.

$$[\,,\,] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

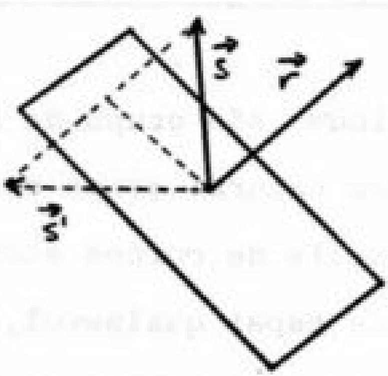
En el cas de les còniques la classificació venia donada per dos enters: el rang i l'índex. Aquí s'arriba a que l'estructura d'àlgebra de Lie ve classificada (*) no per una família d'enters,

(*) El lector perdonarà, espero, que passi per alt els problemes de semi-simplicitat i molts d'altres. Es tracta de mancaments comesos amb plena premeditació.

sinò per una família de *vectors* de $\mathbb{R}^n$, anomenats *arrels* de l'àlgebra de Lie i que són una mena de "valors propis". El Coneixement d'aquestes arrels determina l'àlgebra de Lie.

Les arrels d'una àlgebra de Lie formen una base de $\mathbb{R}^n$ i tenen una curiosa propietat:

Si $\vec{r}$ i $\vec{s}$ són arrels, considerem el transformat $\vec{s}\,'$ de $\vec{s}$ per la reflexió respecte de l'hiperplà perpendicular a r :



Aleshores, s' és també una arrel. Aquesta curiosa relació entre les arrels d'una àlgebra de Lie i els miralls és l'avís de l'entrada a escena dels nostres protagonistes: miralls, calidoscopis i polìedres.

Sigui W el grup generat per totes les reflexions respecte dels hiperplans perpendiculars a les arrels. Aleshores, la "curiosa propietat" de les arrels ens diu que W és un *grup finit*, per tant, W és un *grup finit de reflexions*; es a dir, un dels nostres ben coneguts

$$A_n, B_n, C_n, D_n, I_3, I_4, F_4, E_6, E_7, E_8 \,!$$

Resumint: havíem reduït l'estudi dels grups de Lie al de les àlgebres de Lie i ara hem vist que cada àlgebra de Lie es correspon amb un calidoscopi. Tot això vol dir que, "essencialment", els grups continus compactes de transformacions es redueixen als grups finits de reflexions.

6.- Miralls finits i espais de llaços finits.

No tots els grups continus són grups de Lie. Hi ha un context on apareixen de manera natural grups continus no de Lie i és quan considerem certs espais de corbes anomenats *espais de llaços*. Suposem que X és un espai qualsevol, i suposem que hem escollit un punt x_o de X. Un *llaç* a X és una corba tancada que comença i acaba a x_o. Designem per ΩX l'espai de tots els llaços de X. Aquest espai té una estructura natural de grup continu. En efecte, el producte de dos llaços és el llaç consistent en recórrer primer el primer llaç i seguir amb el segon.

És evident, però, que un espai de llaços serà, en general, massa gran perquè el poguem admetre dintre el nostre concepte de grup continu. En general, ΩX no és compacte, ni tan sol té dimensió finita, amb la qual cosa no sembla un objecte que un deixeble d'Euclides pugui prendre en consideració. Es tracta, però, d'una postura errònia, perquè, en certs casos especials, hi ha espais de llaços que, sense ésser compactes, es poden *deformar* de manera contínua i convertir-los en *espais compactes*. Quan això succeeix direm que ΩX és un *espai de llaços finit*.

Posem un exemple. Prenem com a expai X *l'espai projectiu complex* de dimensió infinita, $X = \mathbb{C}P^{\infty}$ i considerem els llaços sobre X, ΩX. Resulta que, llevat d'una deformació (és a dir, sense canviar el *tipus d'homotopia*) $\mathbb{C}P^{\infty}$ és el mateix que la circumferència S^1 ! Veiem aixi que la circumferència, que ja sabiem que era un grup de Lie, també és un espai de llaços finit. Aquesta situació no és excepcional: es pot demostrar que tot grup de Lie és un espai de llaços finit, amb la qual cosa veiem que el concepte d'espai de llaços finit és una *generalització* del concepte de grup de Lie. (*)

Ens plantejem ara el problema de classificar els espais de llaços finits i caracteritzar els que són grups de Lie. La primera pregunta que hom es formula és: hi ha espais de llaços fi--

(*) Diguem uns mots sobre el fet de *generalitzar*. Tots sabem que hi ha generalitzacions totalment estèrils que no menen enlloc. Aquesta no és pas una d'elles. En efecte, si volem entendre els grups de Lie, i encara que no estiguem interessats en res més que en els grups de Lie, ens cal mirar-los *des de fora*, sumergint la família dels grups de Lie a un "àmbit" més gran, de manera que la "varietat de moduli" pugui ésser descrita desde l'exterior de la manera més simple possible. Aquest tipus de generalització constitueix una de les idees fonamentals de la Matemàtica. Els exemples d'això que estem dient són innumerables i il.lustres.

nits que no són grups de Lie? Fins fa uns anys, no se'n coneixia cap. Tots els espais de llaços finits que apareixien a la natura eren grups de Lie. Si volíem un espai de llaços finit que no fos grup de Lie, calia crear-lo artificialment, calia crear un monstre .

Com es crea un monstre? El mètode standard és el del Dr. Frankenstein: s'agafen trossos de diversos individus i s'enganxen: apareix un monstre. Un altre procediment encara més subtil consisteix en agafar peces d'un mateix individu i unir-les de manera diferent a com estaven unides a l'individu original. Podríem, doncs, fer això mateix: prendre "trossos" de grups de Lie i unir-los d'una manera estranya.

Tot això que acabem de dir és més "ciència ficció" que no pas matemàtica. Aquest mètode del Dr. Frankenstein és massa groller i difícilment realitzable. Potser un cirurgià podria enganxar trossos de grups de Lie, però el monstre que obtindríem difícilment sobreviuria.

Si volem crear monstres, hi ha un mètode molt més avançat: fer *enginyeria genètica*.

Parlem una mica de genètica. A l'any 1974 va aparèixer un treball d'en Sullivan (80 pàgines als Annals of Mathematics) que de fet ja feia anys que anava circulant en forma de fotocòpies i que va exercir una influència immensa a la Topologia. Du per títol *"Genètica de la teoria d'homotopia i la conjectura d'Adams"*. Una de les teories exposades a aquest treball ve a dir que els espais, des del punt de vista de la teoria d'homotopia, tenen, a part de la seva *forma externa*, un *genotípus* format per una sèrie de *gens*, un per a cada primer p, junt amb un "esquelet", o millor dit, un substracte químic, anomenat el *tipus racional* de l'espai.

Aquest substracte químic és pura química orgànica, i està molt ben entès. Cada un dels gens és també química, però d'un grau de complicació molt més elevat i podem comparar-lo a complexos d'àcids nucleics.

(Deixeu-me fer un parèntesi de tipus metafísic. Hi ha qui creu que la vida (o al menys la d'alguns organismes superiors) no es pot reduir a pura química, sinó que un ésser viu, a part dels seus gens i del seu substracte químic té alguna cosa més. Doncs bé, malgrat el que acabem de dir sobre el treball d'en Sullivan, la descripció genètica que acabem de fer dels espais només és vàlida si l'espai és *simplement connex*. En presència d'un grup fonamental no trivial no podem reduir l'espai a un genotipus més un substracte químic...)

Tornem a la fabricació de monstres. Ara ja es fàcil. Prenem gens de diversos grups de Lie i formem a partir d'ells un espai. Obtindrem, si ho fem bé, un espai de llaços finit que no és un grup de Lie. Ja tenim el monstre. (Observem que aquest monstre és, localment, un grup de Lie, però ara la paraula localment no s'ha d'interpretar com ho faria el Dr. Frankenstein, en el sentit que cada tros petit és un tros d'un grup de Lie, sinó que la paraula "localment" cal entendre-la en la seva significa-

aritmètica).

La "genètica" traslláda el problema de la classificació a nivell de gens. Podem crear gens diferents dels dels grups de Lie? Podem classificar els gens?

La resposta a la priemra pregunta és *sí*. La segona pregunta, malgrat els importants avenços dels darrers anys, segueix sense tenir una resposta completa. De totes maneres, la classificació dels diversos gens, és a dir, la classificació dels *espais de llaços finits mòdul* p utilitza de manera essencial els *grups finits de reflexions*, que són els protagonistes de la nostra història.

Anem a indicar com es fa per crear espais de llaços finits mòdul p (el que hem estat anomenant "gens"). Pensem un gen com un d'aquells àcids nucleics. Prenem un gen standard, per exemple, el més important de tots, que és el que correspon al tor $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$. Fem ara operar un grup finit sobre aquest gen i considerem el quocient del gen per l'acció del grup. (*) És com per exemple, prendre una cadena de ADN, i fer una sèrie d'enllaços interns. Obtenim un altre gen que, en general, no donarà lloc a un espai de llaços finit. Una condició suficient perquè obtinguem un espai de llaços finit és

(*) Estic utilitzant un llenguatge molt imprecís, però m'és impossible entrar en detalls. De fet, cal realitzar aquestes operacions a nivell d'*espais classificadors*.

que el grup pel qual fem quotient sigui un *grup finit de reflexions!*

O sigui, que, els grups finits de reflexions que ens proporcionaven la clau per entendre la classificació dels diferents grups de Lie, també ens donen la primera aproximació a entendre la classificació dels espais de llaços finits. En aquest cas, però, no es tracta dels mateixos grups finits de reflexions, sinò d'una generalització: es tracta de grups de reflexions a un espai vectorial sobre el *cos finit* Z/p . És a dir, es tracta de reflexions respecte de *miralls mòdul p*. És més; el grup de Lie sorgeix quan el grup finit de reflexions mòdul p "puja" a un grup de reflexions "real", que són els que hem estat considerant fins ara.

7.- Allò que no hem dit sobre els grups de reflexions.

No hem, ni de bon tros , exhaurit les àrees de la matemàtica on apareixen miralls, calidoscopis i polïedres. Com a cloenda , donarè una sèrie de títols d'altres possibles paràgrafs:

- grups de reflexions i cristal.lografia.
- grups de reflexions infinits.
- grups de reflexions i geometria hiperbòlica.
- simetria a la natura i a l'art.
- polïedres semiregulars.
- grups de reflexions sobre els complexos.
- grups de reflexions i teoria d'invariants.

- grups de Lie finits.
- grups de reflexions i grups alebraics.
- l'icosàedre i la resolució de l'equació de 5è. grau.
- grups simples finits.
- tesel.lacions euclidianes, hiperbòliques i el.líptiques.
- grups de reflexions i enpaquetaments d'esferes.
- els grups de reflexions com a grups abstractes etc.