Butll. Soc. Cat. Mat. 5, Maig 1980

~~0139~~
0140

Com distingir una taronja d'un dònut *

(Mètode pràctic a l'abast de tothom)

J. Aguadé

Una taronja i un dònut no s'assemblen de res i tothom que no tingui pa a l'ull és capaç de distingir-los sense cap dificultat. Aquesta veritat tan evident deixa de ser-ho si pretenem donar-ne una fonamentació rigorosa. No ens n'hem d'estranyar: d'ençà de fa 2500 anys sabem que les coses que semblen fàcils deixen de ser-ho quan s'exigeix que siguin demostrades. En què ens podem basar per a distingir la forma d'una taronja de la d'un dònut? Millor dit: quin criteri absolutament rigorós i infal.lible podriem donar per tal d'esbrinar sense possibilitat d'error si un objecte desconegut té la forma d'un dònut o bé la d'una taronja? Per tal de veure que la resposta a aquesta pregunta no és gens trivial, podem citar un diàleg socràtic, possiblement apòcrif, que ens parla d'aquest tema:

Sòcrates: ¿No has observat, amic Glaucó, aquests pastissos anomenats dònuts que tenen una forma ben curiosa?

Glaucó: Si, certament els he vistos.

S.: I creus que la forma que presenten podria confondre's, diguem, amb la d'una taronja?

G.: Penso que no, donat que ambdues formes són ben diferents.

---

* Aquest article, de manera premeditada, està escrit com si el lector no sabés ni un mot sobre Topologia Algebraica, tot i que en general això no serà cert. El motiu és que es tracta de veure que certs conceptes de Topologia Algebraica poden motivar-se fàcilment, àdhuc als estudiants més joves

S.: Penso el mateix, bon amic meu. Malgrat això, creus que podries donar a un foraster que mai no hagués vist aquests objectes ni cap de semblant, un mètode per a distingir-los sense error?

G.: Li diria que les taronjes són rodones i els dònuts tenen un forat al mig. Crec que així ho entendria.

S.: Molt possible fora que t'entengués, però el teu mètode no està lliure d'error.

G.: Com és això?

S.: En primer lloc, no és segur que el nostre foraster incult conegui el sentit de la paraula "rodó" i en cas de conèixe'l, bé podria ser que l'apliqués al dònut, donades les seves formes arrodonides i al fet de que és ben apte per a rodolar per un pendent. Tampoc no és cert que les taronjes siguin totes rodones. N'he vist d'allargassades com un ou i fins de banyudes i de formes ben irregulars.

G.: Indiscutiblement, hem de convenir en que el criteri sobre l'arrodoniment no és pas de la mena dels que ens convenen. Però hi ha també el criteri del forat.

S.: I com esplicaries al nostre foraster el que és un forat?

G.: Diria que el forat que té el dònut és una part del dònut on no hi ha dònut.

S.: T'has ben embolicat, amic Glaucó! Si el forat és on no hi ha dònut, com pot ser una part del dònut? I si tu vols explicar què és un dònut, com ho pots fer basant-te en el no-dònut? D'altra banda, podria molt bé ésser que a l'interior de la taronja hi hagués un tros buit. Seria també un forat i no per això canviaria la forma exterior de la taronja.

G.: Certament ara veig, oh mestre!, que no és pas fàcil descriure la forma dels objectes que hom pot veure a la natura i conèixer quins són els trets que les diferencien. També veig que la ciència de la Geometria, tal com la coneixem, no basta per a resoldre aquest problema...

El diàleg continua, però aquest era el tros que ens interessava. Avui dia disposem d'una Geometria que els grecs no van conèixer i que està més ben adaptada a "descriure la forma dels objectes". Es tracta de la Topologia Algebraica, una branca de la Matemàtica que ha conegut durant el segle XX un desenvolupament immens i que a l'actualitat ocupa un lloc preeminent per la seva vitalitat i per les nombroses interrelacions amb altres camps de la Matemàtica. L'objectiu d'aquest article és posar de manifest que certes idees bàsiques de Topologia Algebraica es basen en conceptes extremadament senzills i intuitius. Ho farem resolent el problema de distingir la forma d'una taronja de la forma d'un dònut per diversos mètodes i veient que cada un d'ells duu a conceptes importants a Topologia Algebraica. Com que ja Plató ens diu que hi pot haver taronjes i dònuts molt deformats, ens cal prendre una postura radical: anomenarem taronja a tot objecte que pugui obtenir-se a partir d'un objecte esfèric deformant-lo tan com volguem, sense trencar-lo (per exemple, un ou, un plàtan, una botifarra, etc.) i anomenarem dònut a tot objecte que pugui obtenir-se a partir d'un objecte en forma de dònut, deformant-lo tan com volguem sense trencar-lo (per exemple, un tortell, una tassa, una pipa, etc.)

Heus aquí diversos mètodes per a distingir una taronja d'un dònut:

<u>Mètode 1</u>: amb un cordill

"Prengui's un cordill elàstic i faci's un llaç al voltant de l'objecte en questió. Si, de qualsevol manera que es faci el llaç, aquest pot fer-se lliscar fins a deixar anar l'objecte, es tracta d'una taronja. Si, per contra, som capaços de fer un llaç al voltant de l'objecte, del qual aquest no es pugui despendre, és que es tracta d'un dònut."

...

Dit breument: un dònut pot penjar-se d'un fil sense que caigui (passant el fil pel forat del mig) mentre que uha taronja no es pot penjar d'un fil sense que pugui escórrer-se i caure.

Quina és la propietat topològica de les dues figures que s'amaga darrera aquesta construcció del cordill? Es tracta d'un invariant topològic de gran importància, anomenat grup foamental. Anem-ho a veure: Un llaç al voltant d'una taronja o d'un dònut no és res més que una corva tancada dibuixada sobre la superfície. Dir que el cordill és elàstic vol dir que considerem equivalents dues corves que puguin transformar-se una en l'altta per una deformació contínua, pel que se'n diu una homotopia. El mètode anterior es basa en que, sobre l'esfera, tota corva tancada pot contraure's fins a un punt, mentre que sobre el dònut hi ha corves tancades que no poden contraure's fins esdevenir un punt. A Topologia es diu que l'esfera és un espai simplement connex mentre que el dònut és un espai no simplement connex.

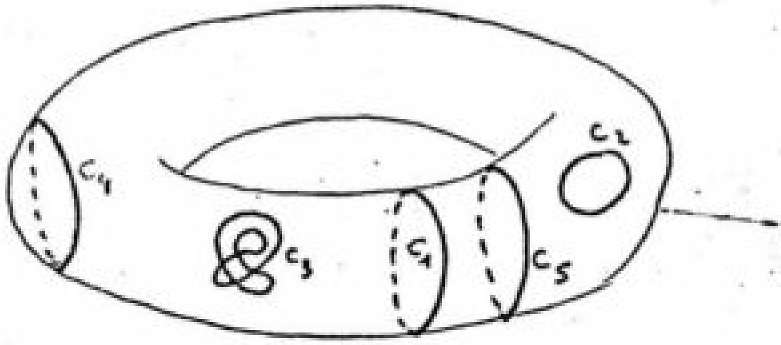
El mètode del cordill distingeix entre una taronja i un dònut perquè ambdós objectes tenen grups fonamentals diferents.

<u>Mètode 2</u>: amb un ganivet.

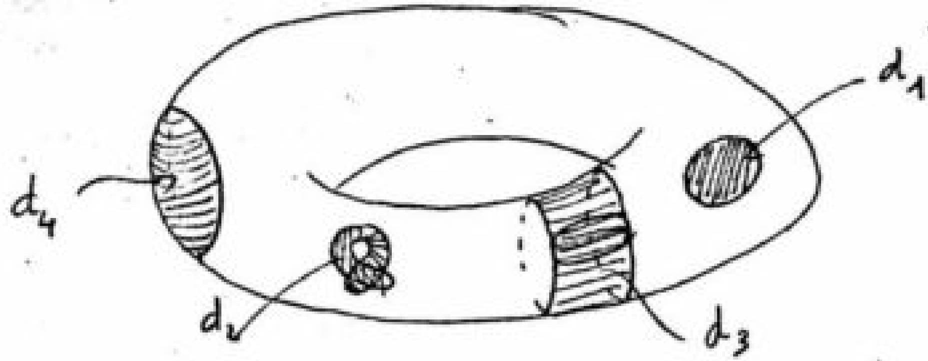
"Faci's un tall de banda a banda de l'objecte en questió. Si no queda dividit en dues patts és que es tracta d'un dònut. Si, de qualsevol manera que es faci el tall, sempre queden dos trossos separats, és que es tracta d'una taronja."

Dit breument, sempre que donem un tall a una taronja la partim en dues parts, però segons com tallem un tortell, cal fer dos talls per a separar-ne un tros.

Anem ara a veure com també aquest mètode d'aspecte poc científic es basa en un invariant topològic de gran importància: es tracta d'un cas particular dels anomenats grups d'homologia. Pensem, per exemple, en la superfície d'un dònut. Podem dibuixar-hi corves tancades, per exemple les corves c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.



Podem també considerar famílies finites de corves tancades. Així, per exemple, podem considerar les cinc corves tancades anteriors que formen una família $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$. Designarem aquesta família per $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$. Si considerem el conjunt de totes aquestes famílies, veiem que es tracta d'un grup abelià perquè podem definir la suma de dues famílies com la unió, el.liminant els termes repetits. Per exemple, la suma de la família $c_1 + c_2 + c_3$ i la família $c_3 + c_4 + c_5$ serà la família $c_1 + c_2 + c_4 + c_5$. Tenim, doncs, un grup abelià que s'anomena grup dels cicles. D'altra banda, podem considerar sobre la superfície del dònut zones que puguin recobrir-se amb un disc de material elàstic, per exemple, les zones d_1, d_2, d_3, d_4.



Fixem-nos ara en que cada una d'aquestes zones presenta una vora que pot descriure's com una unió de corves tancades. Per exemple, podem dir que la vora de d_1 és c_2, la vora de d_2 és c_3, la vora de d_4 és c_4 i la vora de d_3 és $c_1 + c_5$. Això ens diu que tenim uns certs cicles que són vora de zones plenes. De fet, aquests cicles que són vores formen un subgrup del grup dels cicles, anomen el subgrup de les vores. Podem ara definir un grup H que sigui el cocient del grup dels cicles pel subgrup de les vores. Aquest grup H és el que s`anomena "primer grup d`homologia a coeficients mòdul 2". Quant val? Com pot calcular-se? Aquí és on intervé la Topologia Algebraica i estudia propietats d`aquests grups que ens permeten de calcular-los. El resultat és aquest: per a l`esfera el grup val zero, per a la superfície del dònut el grup val $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$.

Quina relació hi ha entre aquests grups d`homologia i el nostre mètode del ganivet? Molt senzill: si el grup de l`esfera val zero, això vol dir que tot cicle és vora, és a dir, que tota corva tancada limita una zona de la superficie. Per tant, si tallem seguint qualsevol corva tancada sempre obtindrem dos trossos. En canvi, al dònut hi ha cicles que no són vores (perquè el grup d`homologia és diferent de zero), és a dir, hi ha corves tancades que no limiten cap zona de la superficie, és a dir, que no separen el dònut en dues parts. Si tallem per una d`aquestes corves (per exemple, la corva c_1 n`és una) no obtenim pas dos trossos, sinó un de sol.

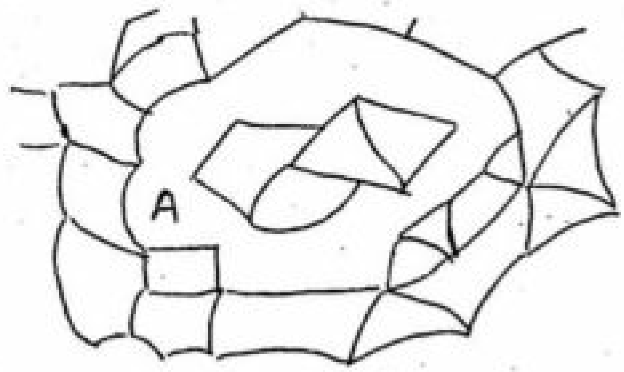
El mètode del ganivet distingeix una taronja d`un dònut perquè ambdós objectes tenen grups d`homologia diferents.

<u>Mètode 3</u> o de les parcel.les

"Imagini`s que la superficie de l`objecte en questió és un terreny a parcel.lar i faci`s una parcel.lació ben feta amb parcel.les de forma i mida arbitrària, separades entre si per línies. Anomenem plaça al lloc on es troben tres o més d`aquestes línies i carrer als segments entre dues places. Sumi`s el nombre de parcel.les amb el de places i resti`s el nombre de carrers. Si dóna 2, es tracta d`una taronja, si dóna zero, és un dònut."

Aquest mètode gairebé màgic es basa en l`invariant topològic més antic que es coneix, anomenat "característica d`Euler". Es tracta d`un enter que es pot definir a partir dels grups d`homologia de que hem parlat al tractar el mètode del ganivet. Val 2 pel cas d`una esfera i val zero pel cas de la superficie d`un dònut. Un dels teoremes més bonics de la Topologia Algebraica diu que si sumem les parcel.les i les places i restem els carrers obtenim la característica d`Euler de l`objecte en questió i això independentment de com haguem fet la parcel.lació! No és meravellós?

Cal dir unes paraules sobre l`observació de que la parcel.lació ha de ser "ben feta". No donaré una definició rigorosa del que és una parcel.lació ben feta, però es refereix , per exemple, a que les parcel.les han de tenir forma més o menys poligonal, és a dir, una parcel.lació com la següent



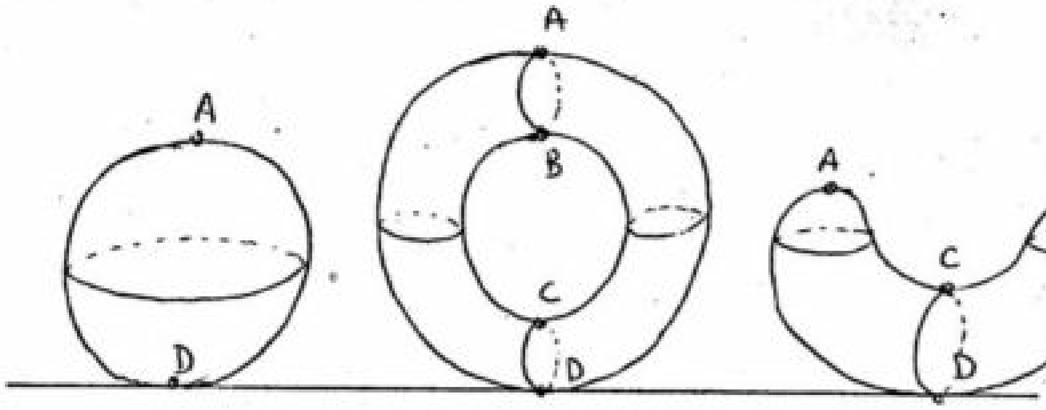
no s`admet perquè la parcel.la A té una forma no permesa.

El mètode de les parcel.les distingeix una taronja d`un dònut perquè ambdós objectes tenen característiques d`Euler diferents.

<u>Mètode 4</u> o dels colls i muntanyes

"Col.loqui`s l`objecte en questió dret sobre una taula i miri`s com si fos una zona de terreny. Presentarà cims i colls. També presentarà anti-cims, és a dir, cims cap per avall i anti-colls, és a dir, colls cap per avall. Si presenta carenes horitzontals o zones planes, les deformem una mica (o inclinem una mica la taula) per tal de que deixin de ser horitzontals. Sumi`s el nombre de cims i anticims i resti`s el de colls i el d`anti-colls. Si dóna 2, és una taronja, si dóna zero, és un dònut."

Posem un exemple: Si posem la taronja, el dònut i una taronja deformada en la forma següent:



observem que A és un cim, B un anti-coll, C un coll i D un anti-cim.

Darrera aquest mètode s`amaga la part més elemental de l`anomenada "teoria de Morse" que estudia funcions reals definides sobre varietats. En el nostre cas, sobre la taronja i el dònut posats sobre la taula tenim la funció "alçada" que associa a cada punt de l`objecte la seva alçada referida a la taula. Què són els cims, anticims, colls i anti-colls? Són, simplement, els màxims, mínims i punts d`inflexió de la funció alçada, és a dir, els punts en que la derivada s`anul.la, els punts anomenats crítics. Per tant, quan comptem els "accidents del terreny" estem de fet comptant els punts crítics d`una certa funció real definida sobre l`objecte. El primer teorema de la teoria de Morse diu que la suma (algebraica) dels punts crítics de qualsevol funció definida sobre una superficie coincideix amb la característica d`Euler de la superficie, de la qual hem parlat al mètode de les parcel.les. I això independentment de la funció que prenguem (sempre que tingui només un nombre finit de punts crítics)!

. . . .

El mètode dels colls i muntanyes distingeix una taronja d'un dònut perquè ambdós objectes admeten funcions reals amb diferent nombre de punts crítics (comptats amb el seu signe).

Podriem encara citar altres mètodes, però ja n'hi ha prou. Hem vist com conceptes que hom podria considerar "superiors" com ara el grup fonamental, l'homologia, triangulacions d'una superficie, característica d'Euler, teoria de Morse, punts crítics de funcions, etc. són, en el fons, senzills i intuitius. També hem vist que la "geometria que s'ocupa de "descriure les formes dels objectes" com l'anomenava Plató, la Topologia Algebraica, com és ara coneguda, és un camp d'una importància pedagògica considerable, injustament inexplorada.

Exercici: Modificar l'article anterior allà on calgui i convertir-lo en un de titulat: Com distingir un dònut d'un càntir.

(Nota: Al llarg del text anterior utilitzem els mots "Topologia Algebraica" en un sentit no tècnic. De fet ens referim a una sèrie de disciplines que avui dia estan més o menys individualitzades: Topologia Algebraica propiament dita, Topologia Diferencial, Topologia Geomètrica, Geometria Diferencial Global, etc. Normalment hom es refereix a totes aquestes diaciplines amb el nom comú de Topologia, però nosaltres no ho hem fet per a evitar la confusió amb la Topologia General que és una branca independent que pràcticament no té res a veure amb tot això.)

Universitat Autònoma de Barcelona
i
Forschungsinstitut für Mathematik, ETH-Zürich.