Febrero 1998

Espacios moduli de fibrados vectoriales sobre curvas algebraicas[1]

Contenido

1 Espacios moduli

La referencia principal de esta parte es el libro de Newstead [19], y también él de Mumford [16], y el articulo de Seshadri [20].

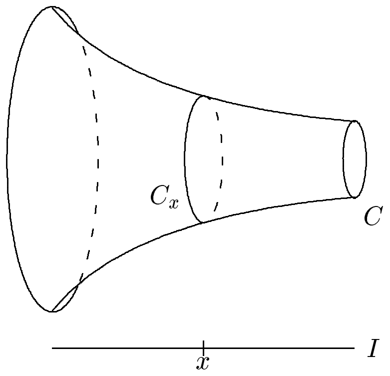
La noción de un espacio moduli está ligada a problemas de clasificación: Dada una colección de objetos A (puede ser por ejemplo curvas, superficies, *3-folds*, o cualquier tipo de objeto geométrico), y una noción de equivalencia $\sim$, el problema consiste en atribuir a $A/\sim$ una estructura topológica, y mas: una estructura de variedad, que "refleje" la estructura de los objetos que se estudia. La topología debe reflejar una noción de *familias* continuas de objetos. Por una familia (parametrizada por S) se entiende una colección de objetos de A tal que para todo $s \in S$ existe A_s.

1.1 Ejemplo. — Sea A la colección de círculos, puntos y rectas, con la siguiente relación de equivalencia: Dos círculos C_1 y C_2 son equivalentes cuando tienen lo mismo radios: $r(C_1) = r(C_2)$; cualesquiera dos puntos son equivalentes, y cualesquiera dos rectas lo son. Entonces tenemos naturalmente,

$$A/\sim = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}.$$

Por ejemplo, una familia C parametrizada por un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ puede ser cualquier salida de revolución.

[1]Lecciones por Profa. Leticia Brambila Paz (México), parcialmente apoyada por FACEPE. Notas por Joachim Kock.



Para cada $x \in I$ tenemos un círculo C_x.

1.2 Ejemplo. — Otro ejemplo de familia: Una familia de hipersuperficies de $\mathbb{P}^n$ de grado d, parametrizada por S, es una subvariedad cerrada $X \subset S \times \mathbb{P}^n$ tal que $X \cap \big(\{s\} \times \mathbb{P}^n\big)$ es una hipersuperficie de grado d.

1.3 Propiedades que toda familia debe satisfacer.

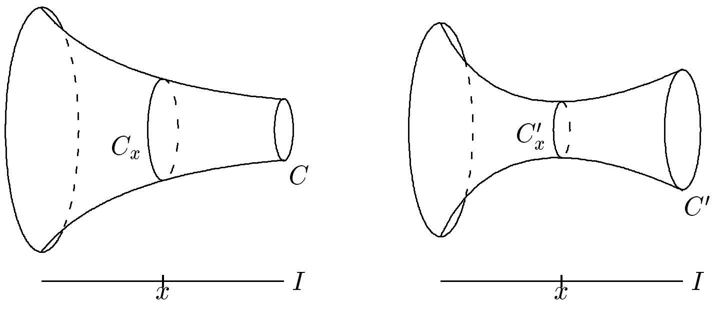
(i) Una familia parametrizada por un punto $\bullet$ debe ser un objeto de A.

(ii) Hay una noción de equivalencia $\sim_F$ de familia tal que si dos familias F y F' (parametrizadas por la misma base S) son equivalentes entonces todo miembro lo es. Esto es,

$$F \sim_F F' \Rightarrow F_s \sim F'_s \quad \forall s \in S$$

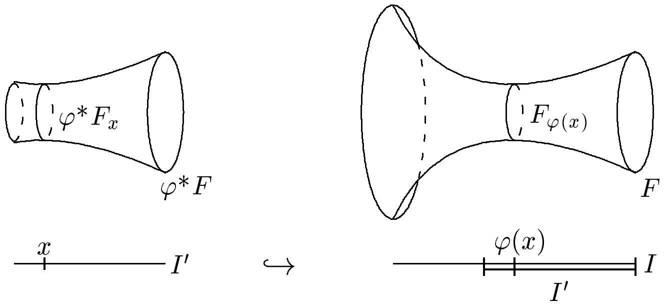
(iii) Hay una noción de familia inducida: para todo morfismo $\phi : S' \to S$, y para toda familia F parametrizada por S, debe existir una familia inducida denotada $\phi^* F$, parametrizada por S', que respecte las tres reglas siguientes: $(\phi \circ \phi')^* = \phi'^* \circ \phi^*$, $\mathrm{Id}^* = \mathrm{Id}$, y $F_1 \sim_F F_2 \Rightarrow \phi^* F_1 \sim_F \phi^* F_2$.

1.4 Ejemplo. — Las dos familias C y C' (parametrizadas por un intervalo $I \subset \mathbb{R}$)



no son equivalentes, por que los círculos C_x y C'_x no tienen lo mismo radios.

1.5 Ejemplo. — Considere la inclusión de $\varphi : I' \hookrightarrow I$. Entonces la familia inducida $\varphi^* F$ es simplemente la familia original restringida a I'. Esto es, el miembro de $\varphi^* F$ correspondiente a un parámetro $x \in I'$ es equivalente al miembro de F correspondiente a $\varphi(x) \in I$.



Definición. — Un problema moduli consiste en los siguientes dados: una colección de objetos A, con una relación de equivalencia, y una noción de familia con una relación de equivalencia compatible.

Resolver el problema significa encontrar una variedad $M = A/\sim$, que respecte a la noción de familia: para cada familia F (parametrizada por S), debe ser un morfismo la función

$$\begin{aligned} \nu_F : S &\longrightarrow M = A/\sim \\ s &\longmapsto [F_s] \end{aligned}$$

que asocia a un parámetro $s \in S$, la clase de equivalencia del miembro F_s correspondiente.

Definiendo un functor (de variedades a conjuntos)

$$\mathcal{F}(S) := \left\{ \begin{matrix} \text{las clases de equivalencia de} \\ \text{familias parametrizadas por } S \end{matrix} \right\},$$

estamos pidiendo que para toda variedad S, la función

$$\begin{aligned} \varphi_S : \mathcal{F}(S) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(S, M) \\ F &\longmapsto \nu_F \end{aligned}$$

sea una *biyección.* O equivalentemente, en la lenguaje de functores, que (M, φ) represente al functor $\mathcal{F}$.

Definición. — Un espacio moduli fino para un problema de moduli $\mathcal{F}$ es un par (M, φ) que represente al functor $\mathcal{F}$.

1.6 Observación. — Si $\varphi : \mathcal{F}(-) \to \mathrm{Hom}(-, M)$ es una biyección, en particular, cuando $S = \bullet$ es un punto tenemos: primero, por la definición de problema de moduli: $\mathcal{F}(\bullet) = A/\sim$. Segundo, por la biyección, $\mathcal{F}(\bullet) = \mathrm{Hom}(\bullet, M) = M$. Luego, $A/\sim = M$. Pidiendo que φ sea una biyección, obtenemos $A/\sim = M$ sin necesidad de pedirlo antes

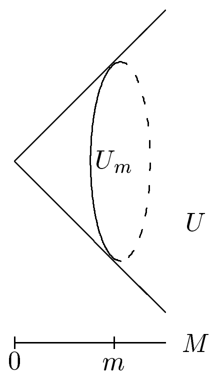
Por otro lado, en el caso particular donde $S = M$ obtenemos $\mathcal{F}(M) \simeq \mathrm{Hom}(M, M)$. Como en $\mathrm{Hom}(M, M)$ tenemos el elemento distinguido Id_M, por la biyección tenemos entonces un elemento distinguido en $\mathcal{F}(M)$, esto es, una familia U parametrizada por M. Esta familia se llama la *familia universal*, y tiene la siguiente propiedades: para cada

$m \in M$, el miembro U_m correspondiente pertenece justamente a la clase de equivalencia especificada por $m \in M = A/\sim$, esto es, la función

$$\begin{aligned} \nu_U : M &\longrightarrow M = A/\sim \\ m &\longmapsto [U_m] \end{aligned}$$

es la identidad.

1.7 Ejemplo. — Considere la familia universal U del espacio moduli $M = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ introducida antes:



Para cada punto $m \in M$, el círculo U_m tiene radio exactamente m.

Definición equivalente. — Un espacio moduli fino es un par (M, U), donde M es una variedad y U es una familia parametrizada por M tal que para toda familia F parametrizada por S, existe un único morfismo $\phi : S \to M$ tal que $\phi^* U = F$

La existencia de una familia universal es una condición muy fuerte, y en general no existen espacios moduli finos. A veces, lo que hay es un espacio moduli *coarse* — una noción que exige una propiedad universal menos fuerte: no se pide biyección de φ (ver la definición de coarse moduli en el libro de Newstead [19]).

Lo que muchas veces impiden la existencia de un espacio moduli fino es el *jump phenomenon*: Si existe una familia parametrizada por S, y un $s_0 \in S$ tal que $F_s \not\sim F_{s_0}$ para todo $s \in S, s \neq s_0$, y $F_{s_1} \sim F_{s_2}$ para todos $s_1, s_2 \in S \setminus \{s_0\}$, entonces ya es imposible la existencia de un espacio moduli fino.

Como ejemplo, considere el problema de moduli dado por matrices 2×2 $A_t = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$, con la relación de equivalencia $A_t \sim A_{t'} \Leftrightarrow t' = \lambda t$, $\lambda \neq 0$. Ahora, $A_t \not\sim A_0$, y tenemos obstrucción para un espacio moduli fino.

La teoría de Mumford define dos subconjuntos $A_s \subset A_{ss} \subset A$ de la colección original. Los objetos de A_s son los *estables*, y los de A_{ss} los *semiestables*. Propiamente definidos estos subconjuntos, satisfacen que $A_s/\sim$ es un espacio moduli *casi-proyectivo* y que $A_{ss}/\sim$ es proyectivo. La construcción se basa en acciones de grupos reductivos, (ver el libro de Mumford [16]).

1.8 Digresión sobre moduli de superficies de Riemann. — Para la clasificación de objetos geométricos, tenemos primero los invariantes topológicos. Estos proporcionan una partición $A = \cup A_i$ del problema de moduli, y cada parte puede ser tratada separadamente. Si los objetos son superficies de Riemann compactas (o equivalentemente: curvas algebraicas complejas no-singulares), el invariante topológico que tenemos es el género.

Sea A_g la colección de todas las superficies de Riemann compactas de género g. Entonces varias clasificaciones son posibles, dependiente de la relación de equivalencia:

Cuando la relación es "equivalencia homotópica" tenemos el espacio de Teichmüller $\mathcal{T}_g$. Aquí, dos superficies de Riemann son consideradas equivalentes si existe entre ellas un difeomorfismo que preserve orientación y que sea homotópico a la identidad.[2]

Cuando la relación es "equivalencia homológica" tenemos el espacio de Torelli. Dos superficies de Riemann S y S' son homológicamente equivalentes si existe entre ellas un homeomorfismo conforme que mande la base canónica de $H^1(S)$ en la base canónica de $H^1(S')$ (homología de dimensión real 1). El espacio de Torelli es un cociente del espacio de Teichmüller.

Y finalmente, $\mathcal{M}_g$ es el espacio moduli (de Riemann) donde dos superficies de Riemann son consideradas equivalentes si existe entre ellas un difeomorfismo (que preserve orientación). El espacio puede también ser construido como el cociente $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}_g/\operatorname{Mod}$ donde Mod es el grupo modular (mapping class group) de clases de homotopía de difeomorfismos (que preserven orientación).

Considerando A_g como la colección de las curvas algebraicas complejas no-singulares, tenemos $\mathcal{M}_g = A_g/\simeq$, donde la relación es isomorfismo. Mencionamos que $\mathcal{M}_g$ tiene una compactificación natural $\mathcal{M}_g^s$ parametrizando clases de isomorfismo de curvas *estables*. Una curva estable es una curva con a lo mas singularidades nodales.

Para teoría de Teichmüller, y sus relaciones a las otras clasificaciones, ver el libro de Nag [17]. Para $\mathcal{M}_g$ y $\mathcal{M}_g^s$ ver Seshadri [20] y su lista de referencias muy extensa sobre el asunto.

1.9 Clasificación de fibrados sobre curvas, y variaciones. — Los espacios moduli que nos van interesar son espacios moduli de fibrados vectoriales sobre una curva algebraica no singular fija X. Fijando también los invariantes numéricos del fibrado que son el grado d y el rango n, estudiaremos los espacios

$$\mathfrak{M}(n,d) = A_s(n,d)/\sim$$

Hay variaciones, como por ejemplo

$$A = \{\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}/\sim$$

las representaciones unitarias e irreducibles del grupo fundamental. Narasimhan y Seshadri [18] mostraron que tiene una correspondencia un a un entre clases de isomorfismo de fibrados vectoriales *estables* de rango n e grado 0, y representaciones unitarias irreducibles (modulo equivalencia).

[2]homotópico a la identidad en el sentido: tome una superficie de Riemann fija X_0, y considere el conjunto de pares (X, f) donde X es una superficie de Riemann y $f : X_0 \to X$ es un difeomorfismo que preserva orientación. Entonces dos pares (X, f) y (X', f') son equivalentes cuando existe un difeomorfismo $g : X' \to X$ tal que $f^{-1} \circ g \circ f'$ sea homotópico a la identidad de X_0.

También tiene una relación con el problema

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{soluciones minimales de} \\ \text{ecuaciones Yang-Mills} \end{matrix} \right\} / \sim$$

En el libro de Kobayashi [12] viene que un fibrado estable es lo mismo que un fibrado con una métrica Hermitian-Einstein: El que la métrica sea Hermitian-Einstein es lo que da solución a cierto tipo de ecuaciones de Yang-Mills. Donaldson [8] hace para superficies de Riemann, y Uhlenbeck-Yau [22] lo trae para variedades de Kähler.

2 Fibrados vectoriales sobre curvas

Esta sección recuerda las propiedades básicas de fibrados vectoriales, y da la clasificación de fibrados lineales sobre una curva no-singular. La referencia principal de esta parte es el libro de Gunning [10].

Sea E un fibrado vectorial de rango n, sobre una variedad compacta X. La variedad y la categoría donde se trabaja puede ser en el sentido topológico, diferencial, algebraico o holomorfo ...

Una terna $(X \times \mathbb{C}^n, X, p)$, donde X es una variedad compacta y $p : X \times \mathbb{C}^n \to X$ es la proyección, se llama *fibración trivial.*

Definición. — Un fibrado vectorial E sobre X, de rango n es una terna (E, X, p) donde $p : E \to X$ es un morfismo de variedades tal que

(i) para todo $x \in X$ la fibra $E_x := p^{-1}(x)$ sea un espacio vectorial de dimensión n, con estructura de espacio vectorial compatible con la estructura de variedad inducida por E.

(ii) para todo $x \in X$ existe una vecindad $U \subset X$, $U \ni x$, tal que $(E_{|U}, U, p)$ sea una fibración trivial. Esto es, $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{C}^n$ debe ser lineal en toda fibra.

Es decir que un fibrado vectorial es "localmente trivial".

2.1 Ejemplo. — Sea X un círculo, e considere la unión disjunta de todos las rectas tangentes. Es un fibrado vectorial, el *fibrado tangente.*

Definición. — Cuando el rango es igual a 1, decimos que el fibrado es un *fibrado lineal.*

Para tener una notación menos pesada pasamos a escribir E para indicar el fibrado $p : E \to X$, cuando no tenga peligro de confusión.

Definición. — Una *sección* de un fibrado $p : E \to X$ es un morfismo de variedades $s : X \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{Id}$. O sea, es un morfismo que a cada punto $x \in X$ asocía un punto $s(x)$ en la fibra E_x. Pensamos en una sección como una manera de "poner X dentro de E".

El conjunto de todas las secciones se denota $H^0(X, E)$; es naturalmente un espacio vectorial; ponemos $h^0(E) := \dim H^0(X, E)$. Una de las cuestiones mas importantes sobre fibrados vectoriales es saber esta dimensión.

Definición. — Un morfismo de fibrados de (E, X, p) en (F, X, p') es un morfismo de variedades $\varphi : E \to F$ tal que

(i) $p' \circ \varphi = p$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & F \arrow[dl, "p'"] \\ & X. & \end{tikzcd}$$

O sea, para cada $x \in X$, la fibra E_x debe ir en F_x.

(ii) El mapa inducido $\varphi_x : E_x \to F_x$ sea un homomorfismo de espacios vectoriales.

Un morfismo de fibrados $\varphi : E \to F$ es un *isomorfismo* cuando para todo $x \in X$ el homomorfismo inducido $\varphi_x : E_x \to F_x$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y existe $\psi : F \to E$ tal que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$.

Cualquier fibrado isomorfo al fibrado trivial $X \times \mathbb{C}^n$ se llama trivial también. Se denota $\mathcal{O}_X^n$.

2.2 Observación. — *No es cierto* que si tienen isomorfismos $\alpha_x : E_x \xrightarrow{\sim} F_x$ entre todas las fibras entonces los fibrados son isomorfos. Porque no necesariamente los mapas de las fibras pegan para un isomorfismo *global.* Si fuese así, cualesquiera dos fibrados de rango igual serían isomorfos, una vez que dos espacios vectoriales de dimensión común siempre son isomorfos.

2.3 Operaciones con fibrados vectoriales. — Si V y W son dos espacios vectoriales tenemos varias operaciones que se pueden hacer: el dual V^*, el producto simétrico $\operatorname{Sym} V$, el producto exterior $\bigwedge^r V$, suma $V \oplus W$, producto tensorial $V \otimes W$, espacio de homomorfismos $\operatorname{Hom}(V, W)$ etc. Las mismas operaciones se hacen con fibrados vectoriales: en todos los casos se observe que la fibra del nuevo fibrado es obtenida aplicando la operación correspondiente sobre las fibras:

$$\begin{array}{ccc} (E^*)_x = (E_x)^* & (\operatorname{Sym} E)_x = \operatorname{Sym} E_x & (\bigwedge^r E)_x = \bigwedge^r E_x \\ (E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x & (E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x & \operatorname{Hom}(E, F)_x = \operatorname{Hom}(E_x, F_x) \end{array}$$

2.4 Núcleos y imágenes. — La situación es mas complicada cuando se trata de núcleos y imágenes. El núcleo (o la imagen) de un morfismo de fibrados vectoriales no siempre es un fibrado vectorial. Por ejemplo, sea $X = [-1, 1]$, y considere el morfismo $\phi : X \times \mathbb{C}^2 \to X \times \mathbb{C}^2$ dado por multiplicación por la matriz $\phi_t = \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$, esto es, en la fibra E_t es dado por $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$. Entonces, para $t \neq 0$, el núcleo de ϕ_t es 0, mientras que para $t = 0$, el núcleo es la fibra entera.

Una condición suficiente para que sea un fibrado vectorial el núcleo (o la imagen) de un morfismo $\phi : E \to F$ es que el rango de ϕ_x sea constante en X.

2.5 Subfibrados. — Un *subfibrado* de un fibrado vectorial E es una subvariedad $F \subset E$ tal que $F \cap E_x$ sea un espacio vectorial de dimensión fija, y $(F, X, p_{|F})$ sea un fibrado vectorial. Con esta definición, el núcleo y la imagen son subfibrados exactamente cuando el morfismo tenga rango constante.

Dado un subfibrado $F \subset E$ se tiene el cociente definido por la siguiente relación:

$$(E/F)_x = E_x/F_x.$$

2.6 Sucesiones exactas. — Otra noción importante es la siguiente: se tenemos una sucesión de morfismos de fibrados vectoriales

$$E' \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} E''$$

diremos que es una *sucesión exacta* si $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Hay dos casos particulares de esta situación: Si $E' = 0$, la sucesión es exacta si y solo si β es inyectivo. Si $E'' = 0$, la sucesión es exacta si y solo si α es surjectivo.

Estas fueron las propiedades fundamentales de fibrados vectoriales.

Empezamos ahora el estudio de moduli de fibrados vectoriales. Denotaremos por A_n la colección de fibrados vectoriales de rango n, módulo isomorfismo.

La primera observación es que dados dos fibrados $E \in A_n$ y $F \in A_m$, entonces $E \otimes F \in A_{nm}$ y $E \oplus F \in A_{n+m}$.

En particular se $L_1, L_2 \in A_1$ entonces $L_1 \otimes L_2 \in A_1$. Junto con las observaciones que $L \otimes L^* \simeq \mathcal{O}_X$ y que $L \otimes \mathcal{O}_X \simeq L$, concluimos que $(A_1, \otimes)$ es un grupo, llamado el *grupo de Picard*, denotado $\operatorname{Pic}(X)$. Observe que para rango mayor, A_n no puede ser un grupo por que no hay inverso.

2.7 Funciones de transición y cocyclos. — Sea $p : E \to X$ un fibrado vectorial de rango n, y sean U_α y U_β dos vecindades de un punto $x \in X$. Tenemos entonces dos trivialisaciones $p^{-1}(U_\alpha) \simeq U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ y $p^{-1}(U_\beta) \simeq U_\beta \times \mathbb{C}^n$. Componiendo estos dos isomorfismos, en cada fibra E_x con $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, obtenemos automorfismos $\phi_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{C}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n$. Juntando estas informaciones obtenemos las llamadas *funciones de transición*:

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

conversamente, dada una cobertura $X = \cup U_\alpha$ y funciones de transición $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ que cumplan a las dos condiciones

(i) $\phi_{\alpha\beta} \circ \phi_{\beta\gamma} = \phi_{\alpha\gamma}$

(ii) $\phi_{\alpha\alpha} = \mathrm{Id}$,

se puede pegar las trivialisaciones y definir un fibrado vectorial. La primera condición se llama la condición de 1-cocyclo. El conjunto de clases de equivalencia de 1-cocyclos es denotado $H^1(X, \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}))$. De esta manera, clasificar los posibles fibrados de rango n, hasta isomorfismos, es equivalente a dar una estructura $\{U_\alpha\}$ de X y especificar las funciones de transición $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. En conclusión,

$$A_n/\simeq\, = H^1(X, \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})).$$

En particular cuando $n = 1$, las matrices invertibles son nada mas que funciones invertibles: $\mathcal{G}\ell_1(\mathbb{C}) = \mathcal{O}_X^*$. Obtenemos en este caso

$$(H^1(X, \mathcal{O}_X^*), \otimes) \simeq \operatorname{Pic}(X).$$

2.8 Haces. — Haces generalizan fibrados vectoriales: un fibrado vectorial es un haz localmente libre. Un haz $\mathcal{F}$ tiene ciertos grupos de cohomología $H^i(X,\mathcal{F})$ para $i \in \mathbb{Z}$. Cuando X es compacta y de dimensión finita valen

(i) $i > \dim X \Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0$

(ii) $i < 0 \Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0$.

Si $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ es un morfismo de haces, es inducido un morfismo entre los grupos de cohomología $H^i(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} H^i(X,\mathcal{G})$. Una manera de obtener informaciones sobre grupos de cohomología es a través de sucesiones exactas. Para calcular $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$, la sucesión fundamental es

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

y la sucesión inducida de cohomología es

$$\begin{array}{rlll} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow & H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} \\ \longrightarrow H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow & H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} \\ \longrightarrow H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow & H^2(X,\mathcal{O}_X) \longrightarrow & H^2(X,\mathcal{O}_X^*) \end{array}$$

Los mapas δ son los *operadores de frontera*. Cuando X es una curva tenemos suficiente controle sobre los demás grupos para calcular $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.

2.9 La variedad de Picard de una curva no-singular. — Fijamos ahora X como una curva algebraica no-singular de género $g \geq 1$. Conocemos entonces los siguientes grupos:

$$\begin{array}{ll} H^1(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{2g} & H^1(X,\mathcal{O}_X) = \mathbb{C}^g \\ H^2(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} & H^2(X,\mathcal{O}_X) = 0 \end{array}$$

Sigue que el grupo $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ está en la sucesión siguiente:

$$\mathbb{Z}^{2g} \longrightarrow \mathbb{C}^g \longrightarrow H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

El mapa de frontera $\delta : H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to \mathbb{Z}$ manda un fibrado L en el *grado* $\deg L := \delta(L)$. Es también la primera clase de Chern. El núcleo de δ es el subgrupo de fibrados lineales de grado cero; es denotado $\mathrm{Pic}_0(X)$ y se llama la *variedad de Picard*. Tenemos $\mathrm{Pic}_0(X) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$, luego

$$0 \to \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g} \to H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

2.10 Ejemplo. — Para $g = 1$, $\mathrm{Pic}_0(X) = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ es un toro complejo.

El grupo de Picard es la unión disjunta de las imágenes inversas de los enteros:

$$\mathrm{Pic}(X) = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}_d(X) = \mathrm{Pic}_0(X) \oplus \mathbb{Z},$$

donde $\mathrm{Pic}_d(X)$ es el moduli de fibrados lineales de grado d, y como variedad es isomorfa a $\mathrm{Pic}_0(X)$.

En conclusión, el espacio moduli entero, de todos los fibrados lineales sobre X (modulo isomorfismo) es

$$A_1/\simeq\; = \mathrm{Pic}_0(X) \oplus \mathbb{Z},$$

mientras los problemas con grado fijado tienen solución

$$\mathfrak{M}_{1,d} = \mathrm{Pic}_d(X) \simeq \mathrm{Pic}_0(X) \simeq \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}.$$

Observamos que existe una familia universal $\mathcal{L} \to X \times \mathrm{Pic}_0(X)$, lo que es decir que $(\mathrm{Pic}_0(X), \mathcal{L})$ es un espacio moduli *fino*.

3 Subvariedades de los espacios moduli

Esta sección es una introducción a la teoría de Brill-Noether. Para rango 1, la referencia es Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris [1]; para rango mayor el lector puede consultar el articulo *Geography of Brill-Noether loci for small slopes* [6].

En esta sección, X siempre denota una curva algebraica no-singular de género $g \geq 1$.

Definición. — Decimos que un fibrado vectorial E es *estable* si para todo subfibrado $F \subset E$ vale

$$\frac{\deg F}{\mathrm{rk}\, F} < \frac{\deg E}{\mathrm{rk}\, E}$$

(El número racional $\mu(E) := \frac{\deg E}{\mathrm{rk}\, E}$ es llamado la *inclinación* de E.)

Decimos que E es semiestable si $\mu(F) \leq \mu(E)$ para todo subfibrado $F \subset E$.

Teorema 1 (Mumford) — *Existe un espacio moduli casi-proyectivo $\mathfrak{M}_s(n,d)$ de fibrados vectoriales estables de rango n y grado d sobre X, módulo isomorfismo.*

3.1 Observaciones. — Se $(n,d) = 1$, entonces $\mathfrak{M}_s(n,d)$ es un espacio moduli *fino*. Dos fibrados estables representan el mismo punto en $\mathfrak{M}_s(n,d)$ si y solo si son isomorfos.

3.2 Observación. — Existe una compactificación natural $\mathfrak{M}_{ss}(n,d)$ que es un espacio moduli de fibrados semiestable (de rango n y grado d) con la relación S-equivalencia descrita a seguir:. Si E es semiestable existe una filtración $E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = E$ de tal manera que todos los cocientes E_i/E_{i-1} son estables, con $\mu(E_i/E_{i-1}) = \mu(E)$. Ponga $\mathrm{gr}(E) := \oplus E_i/E_{i-1}$. Entonces dos fibrados E y F son S-equivalentes cuando $\mathrm{gr}(E) \simeq \mathrm{gr}(F)$. Es decir que dos fibrados semiestable E y F representan lo mismo punto en $\mathfrak{M}_{ss}(n,d)$ si y solo si $\mathrm{gr}(E) \simeq \mathrm{gr}(F)$.

Tenemos una función fundamental, que a cada fibrado asocía su determinante, que es un fibrado lineal:

$$\begin{array}{rcl} \det : \mathfrak{M}(n,d) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_d(X) \\ E & \longmapsto & \det E \end{array}$$

Este mapa es surjectivo. Fijemos una clase $\xi \in \mathrm{Pic}_d(X)$. La imagen inversa es una subvariedad en $\mathfrak{M}(n,d)$ denotada $\mathfrak{M}(n,\xi)$. Es decir que el mapa $\det : \mathfrak{M}(n,d) \to \mathrm{Pic}_d(X)$ es una fibración con fibra $\mathfrak{M}(n,\xi)$.

Una manera de estudiar $\mathfrak{M}(n,d)$ (o $\mathfrak{M}(n,\xi)$) es a través de subvariedades. Las subvariedades consideradas aquí son las definidas en termos de la dimensión $h^0(E) := \dim H^0(X,E)$.

3.3 Problemas de Brill-Noether. — El problema original de Brill-Noether era: dada una colección de puntos $p_1, \dots, p_d$ en la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ¿cuando existe una función f con polos exactamente en los puntos dados? Si considere cualquier polinomio $q(x)$ de grado d, entonces $\frac{q(x)}{(x-p_1)\cdots(x-p_d)}$ es una solución a nuestro problema. Todas las posibles soluciones tienen que formar un espacio vectorial $\Gamma(f)$ de dimensión $\dim \Gamma(f) = d+1$.

Mas generalmente, si X es una superficie de Riemann, ¿cuando existe una función que tenga polos exactamente en ciertos puntos dados $p_1, \dots, p_d$? Los puntos define un divisor $D = \sum_{p_i \in X} \nu_i p_i$, y este divisor define por su vez un fibrado lineal L. La cuestión ahora es equivalente a preguntar cual es la dimensión de $H^0(X, L)$.

Teoría de Brill-Noether para fibrados lineales.

Definición. — Decimos que un par (d, r) de números enteros es de *Brill-Noether* si existe un fibrado lineal L con $\deg(L) = d$, y $h^0(L) \geq r+1$.

Queremos ahora determinar en el "plano" $\mathbb{Z}^2$, cuales son los pares de Brill-Noether. La respuesta es el mapa "geográfico" representado en la figura en la página 12.

Algunas restricciones son fáciles de establecer. Recordamos algunas propiedades básicas de fibrados lineales sobre una curvas X de género g: Sea TX el fibrado tangente; el dual T^*X es denotado K y se llama el fibrado canónico; sabemos que $\deg K = 2g-2$. Es que $h^0(K) = g$. Para el fibrado trivial tenemos $\deg \mathcal{O}_X = 0$ y $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$. Tenemos en seguida unas propiedades del grado: $\deg(L \otimes M) = \deg L + \deg M$, y $\deg L^* = -\deg L$. El resultado básico es el teorema de Riemann-Roch que afirma

$$h^0(L) - h^0(L^* \otimes K) = \deg L + (1-g).$$

Se $\deg L < 0$ entonces $h^0(L) = 0$, y usando Riemann-Roch este resultado implica también que si $\deg L > 2g-2$ entonces $h^0(L) = d+1-g$. Esto resuelve la cuestión para $d < 0$ y para $d > 2g-2$. En el intervalo $0 < d < 2g-2$ tenemos el teorema de Clifford:

$$0 < \deg L < 2g-2 \Rightarrow h^0(L) < 1 + \tfrac{1}{2} \deg L.$$

Juntos, eses resultados dan las restricciones sobre el mapa de Brill-Noether dadas por las rectas llamadas *recta de RR* y *recta de Clifford*.

Definición. — Dados d, r, g, el número

$$\rho_d^r := g - (r+1)(r-d+g)$$

se llama el número de Brill-Noether. El locus de Brill-Noether es la siguiente subvariedad en $\mathrm{Pic}_d(X)$:

$$\mathcal{W}_d^r := \{L \in \mathrm{Pic}_d(X) \mid h^0(L) \geq r+1\}.$$

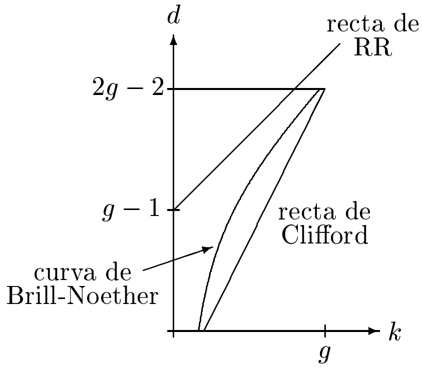
El primero resultado profundo para completar al mapa de Brill-Noether es

3.4 Proposición. (Kempf-Kleiman) — *Sea X cualquier curva. Si $\rho_d^r \geq 0$ entonces $\mathcal{W}_d^r \neq \emptyset$.*

Con la hipótesis que X sea una curva *general*, el mapa se completa:

3.5 Proposición. — *Para X general, si $\rho^r_d < 0$ tenemos $\mathcal{W}^r_d = \emptyset$.*

Esos resultados diseñan en el mapa una curva (curva de Brill-Noether), abajo de la cual se sabe que el locus es vacío. En el mapa usamos $k := r+1$, para conformar a la literatura.



Los siguientes resultados describen la geometría de las $\mathcal{W}^r_d$:

3.6 Proposición. (Fulton) — *Para* cualquier *curva, si $\rho^r_d \geq 1$ entonces las variedades $\mathcal{W}^r_d$ son conexas.*

3.7 Proposición. (Griffiths-Harris) — *Si X es una curva* general*, para cualquier número de Brill-Noether $0 < \rho^r_d$, las variedades $\mathcal{W}^r_d$ son irreducibles, de dimensión* $\dim \mathcal{W}^r_d = \rho^r_d$.

En general, las $\mathcal{W}^r_d$ son singulares. El resultado siguiente describe las singularidades:

3.8 Proposición. (Gieseker) — *Para una curva general X, considere las $\mathcal{W}^r_d$:*

$$\mathcal{W}^r_d \subset \mathcal{W}^{r-1}_d \subset \cdots \subset \mathcal{W}^1_d \subset \mathcal{W}^0_d \subset \mathrm{Pic}_d(X).$$

Ahora, $\mathcal{W}^{i+1}_d$ es exactamente el lugar singular de $\mathcal{W}^i_d$.

Una referencia para esos resultados es el libro de Arbarello-Cornalba-Griffiths-Harris [1].

Teoría de Brill-Noether para rango mayor.

Cuando pasa de fibrados lineales para fibrados vectoriales de rango mayor, los resultados conocidos en general no son generalizaciones de los de rango 1.

Definición. — Sea X una curva de género g. Una terna (d, n, r) es de Brill-Noether si existe $E \in \mathfrak{M}(n, d)$ con $h^0(E) \geq r + 1$. El lugar

$$\mathcal{W}^r_{n,d} := \{E \in \mathfrak{M}(n, d) \mid h^0(E) \geq r + 1\}$$

de tales fibrados es llamado el *locus de Brill-Noether.*

Las preguntas son ahora: ¿cuando $\mathcal{W}^r_{n,d}$ es no vacío? y cuales son las características topológicas de $\mathcal{W}^r_{n,d}$? Para diseñar un mapa semejante a él del caso $n = 1$ es conveniente usar como ejes $\lambda := k/n$, y $\mu = d/n$, respectivamente.

Como en lo caso de fibrados lineales tenemos el teorema de Riemann-Roch que responde a la pregunta para $\deg(E) > n(2g-2)$, y tenemos también una generalización del teorema de Clifford:

$$0 \leq \deg E \leq n(2g-2) \Rightarrow h^0(E) \leq n + d/2.$$

Pero después, los resultados no se generalizan mas. De nuevo hay el número de Brill-Noether:

$$\rho^r_{n,d} := n^2(g-1) + 1 - (r+1)(r+1-d+n(g-1))$$

pero la curva que diseña este número en el mapa de Brill-Noether no tiene mas el mismo valor definitivo:

Bertram y Feinberg [3] dan ejemplos (con $g = 5$, $n = 2$, $d = 8$, y $r = 3$: que impiden generalizaciones directas de los resultado para fibrados lineales:

3.9 Ejemplo. — Mismo con $\rho^r_{n,d} > 0$ puede acontecer $\mathcal{W}^r_{n,d} = \emptyset$.

3.10 Ejemplo. — Y mismo con $\rho^r_{n,d} < 0$, no necesita ser vacía $\mathcal{W}^r_{n,d}$. Hay ejemplos (con $n = 2$, $d = 2g - 2$, y $r = 4$:

3.11 Ejemplo. — Mismo con $\rho^r_{n,d} > 0$ existen ejemplos donde $\mathcal{W}^r_{n,d}$ dimension mayor que $\rho^r_{n,d}$.

Teixidor [21] ha construido ejemplos (con X general) que muestran que en ciertos paralelogramos arriba de la curva de Brill-Noether, las correspondientes $\mathcal{W}^r_{n,d}$ son no-vacías.

Vea el mapa en el articulo *Geography of Brill-Noether loci for small slopes* [6].

Recientemente, Brambila Paz, Grzegorczyk y Newstead [6] mostraron algunos resultados para $\mu(E) \leq 1$ (valiendo para cualquier curva). Considere la recta tangente a la curva de Brill-Noether en $(1, 1)$: su ecuación es $n = d + g(n-k)$. Entonces, arriba de esta tangente tenemos

(i) $\mathcal{W}^r_{n,d} \neq \emptyset$
(ii) $\mathcal{W}^r_{n,d}$ es irreducible
(iii) $\dim \mathcal{W}^r_{n,d} = \rho^r_{n,d}$
(iv) $\operatorname{Sing} \mathcal{W}^r_{n,d} = \mathcal{W}^{r+1}_{n,d}$.

Debajo de la tangente tenemos simplemente $\mathcal{W}^r_{n,d} = \emptyset$.

En 1997, V. Mercat [15] mostró que resultados semejantes valen para $1 \leq \mu(E) \leq 2$: arriba de la tangente vale $\mathcal{W}^r_{n,d} \neq \emptyset$, y debajo tenemos $\mathcal{W}^r_{n,d} = \emptyset$.

Por otro lado, para $2 \leq \mu(E) \leq 3$ existen debajo de la tangente ejemplos de $\mathcal{W}^r_{n,d} \neq \emptyset$.

3.12 Observación. — El método utilizado en Brambila Paz, Grzegorczyk y Newstead [6] (para $d < n$) consiste en mostrar al existencia de una extensión, con E estable, para cualesquiera rango y grado con $d < n$

$$0 \to \mathcal{O}_X^{r+1} \to E \to F \to 0$$

El fibrado E está en $\mathfrak{M}(n, d)$ y como $\mathcal{O}_X^{r+1}$ es subfibrado de E entonces tiene al menos $r + 1$ secciones.

4 Estabilidad de fibrados

Dado un espacio moduli fino M, se puede construir a partir de la familia universal ciertos fibrados naturales sobre M. Está última sección estudia propiedades de estabilidad de tales fibrados, en particular del *fibrado de Poincaré*.

Sea M una variedad algebraica de dimensión m, y sea H un fibrado lineal amplio. (Ser amplio significa que tiene suficientes secciones para definir una inmersión $M \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(M, H))$.) Sea E un fibrado vectorial sobre M.

Definición. — El H-grado $d_H(E)$ de E es por definición $d_H(E) := c_1(E) \cdot [H]^{m-1}$. La H-inclinación de E es definida como

$$\mu_H(E) := d_H(E)/\operatorname{rk} E.$$

Ahora E es llamado *H-estable* si para todo sub-haz libre de torsión $F \subset E$ se tiene la desigualdad

$$\mu_H(F) < \mu_H(E).$$

Fijamos ahora ciertos invariantes topológicos de fibrados. El polinomio de Hilbert $\chi(F)$ de un fibrado vectorial es un polinomio cuyos coeficientes son combinaciones de clases de Chern. No damos acá la definición exacta (vea Hartshorne [11]), pero en el ejemplo donde la variedad X es una curva, tenemos $\chi(F) = c_1(F)$, y cuando X es una superficie, $\chi(F) = \frac{1}{2}\big(c_1^2(F) - 2c_2(F)\big)$.

Denotamos por $\mathfrak{M}_H(\chi_0)$ al espacio moduli de fibrados H-estables cuyo polinomio de Hilbert sea exactamente χ_0. Preguntamos ahora: ¿cuando $\mathfrak{M}_H(\chi_0)$ es no-vacío?

Lo esencial es determinar cuando un dado fibrado E es H-estable. Existen ciertos criterios: Mehta y Ramanathan [14] relacionan la H-estabilidad de E con la $H_{|V}$-estabilidad de $E_{|V}$, donde V es una hipersuperficie en X. Li [13] considera $\operatorname{Pic}_d(X)$ junto con la polarización definida por el divisor theta θ, donde X es una curva no-singular. Sea $\alpha : X \hookrightarrow \operatorname{Pic}_d(X)$ el mapa Abel-Jacobi de la curva en su variedad de Picard; entonces si α^*E es estable, E es θ-estable. Este es una manifestación de un principio mas general:

4.1 Proposición. — *Si* (A, θ) *es una variedad abeliana principalmente polarizada, entonces existe una curva no-singular* C *y un morfismo* $\alpha : C \to A$ *de tal manera que para todo fibrado* E *sobre* A *tengamos que* $\alpha^* E$ *estable implica* E θ*-estable.*

(En el caso $A = \mathrm{Pic}_d(X)$, i.e. la variedad de Picard de una curva no-singular X, la curva dada por la proposición es exactamente la curva X.)

4.2 Digresión sobre variedades de Prym-Tyurin (Vea la definición exacta en el libro de Birkenhake y Lange [4]) — Una variedad de Prym-Tyurin asociada a una curva es una variedad abeliana tal que existe una curva y una encaje $\alpha : C \to A$ tal que $\mathrm{Pic}_0(A) \hookrightarrow \mathrm{Pic}_0(X)$, sea un embedding, y $\alpha_*(X) \simeq \frac{e^b \theta^{g-1}}{(g-1)!}$ donde b es un cierto exponente (=1 en el caso de la Jacobiana).

Lo que hace funcionar la generalización es la observación $c_1(\alpha_*(F)) = c_1(F)\alpha_*(C)$.

Otro caso donde se conoce la respuesta es en el caso de un producto:

4.3 Proposición. — *Sea* E *un fibrado sobre* $X \times Y$, *y suponga que* L_X *es una polarización de* X, *y* L_Y *una polarización de* Y. *Si* $E_{|X\times\{y\}}$ *es* L_X*-estable y* $E_{|\{x\}\times Y}$ *es* L_Y*-estable (esto para cualesquiera puntos* x, y *genéricos), entonces para cualquier combinación lineal no-negativo* $H := aL_x + bL_y$ *vale que* E *es* H*-estable. (Aquí, en la verdad, Las combinaciones son combinaciones de los pull-backs al producto.)*

Suponemos ahora que X es una curva algebraica no-singular de género $g \geq 2$. Suponemos que $(n, d) = 1$. Entonces el espacio moduli $\mathfrak{M}(n, d)$ de fibrados estables es un espacio moduli fino. La misma cosa vale para el espacio moduli $\mathfrak{M}_\xi := \mathfrak{M}(n, \xi)$ de los fibrados con determinante fijo ξ. Es decir que existe una familia universal

$$\begin{array}{c} \mathcal{U} \\ \downarrow \\ X \times \mathfrak{M}_\xi \end{array}$$

llamada el fibrado de Poincaré. La propiedad universal es que para cada $m \in \mathfrak{M}_\xi$, $U_{|X\times\{m\}}$ es el fibrado sobre X correspondiente a m.

Ahora $\mathfrak{M}_\xi$ es una variedad no-singular y proyectiva, porque cuando $(n, d) = 1$, todo fibrado semiestable es también estable, y hace sentido preguntar si U es un fibrado estable, o mejor: Sea K el fibrado canónico de X (o cualquier fibrado lineal amplio) y sea θ el divisor theta, entonces para una combinación $H := aK + b\theta$, ¿es U H-estable?

Definiendo

$$\mathfrak{M}_H(U) := \left\{ \begin{matrix} \text{fibrados } H\text{-estables } E \text{ sobre} \\ X \times \mathfrak{M}_\xi \text{ con } \chi(E) = \chi(U) \end{matrix} \right\},$$

la cuestión es equivalente a preguntar si $U \in \mathfrak{M}_H(U)$. La respuesta fue dada por Balaji, Brambila Paz y Newstead [2]:

4.4 Proposición. — *El fibrado* $U \to X \times \mathfrak{M}_\xi$ *es* H*-estable, para cualquier polarización* H. *(Esto es,* $U \in \mathfrak{M}_H(U)$.*)*

La demostración usa la proposición del producto: para cada punto $m \in \mathfrak{M}_\xi$, la fibra U_m es un fibrado estable; $U_{|X\times\{m\}}$ es estable, y $U_{|\{x\}\times\mathfrak{M}_\xi}$ es θ-estable.

La pregunta siguiente es cual es la dimensión. Calculamos la dimensión del fibrado tangente. Por la teoría de deformaciones, tenemos un isomorfismo

$$\eta : T_U\big(\mathfrak{M}_H(U)\big) \longrightarrow H^1(X \times \mathfrak{M}_\xi, \operatorname{End}(U))$$

y sabemos que $\operatorname{End}(U) = \mathcal{O} \oplus \operatorname{ad} U$. Luego,

$$= H^1(X \times \mathfrak{M}_\xi, \mathcal{O})$$

porque $H^1(X \times \mathfrak{M}_\xi, \operatorname{ad} U) = 0$. Sigue que $\dim \mathfrak{M}_H(U) = g$.

Considere ahora la familia universal, y la proyección del producto para X:

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] \\ X & X \times \mathfrak{M}_\xi \arrow[l, "p_1"'] \end{tikzcd}$$

Para cada fibrado L sobre X considere el fibrado $U \otimes p_1^* L$. Es un fibrado H-estable sobre $X \times \mathfrak{M}_\xi$ y con invariantes iguales a los de U: $\chi(U \otimes p_1^* L) = \chi(U)$. Luego define un mapa

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \operatorname{Pic}_d(X) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_H(U) \\ L & \longmapsto & U \otimes p_1^* L \end{array}$$

4.5 Proposición. — *Este mapa α es inyectivo, luego un isomorfismo.*

La conclusión es, *grosso modo* que "una componente del moduli del moduli es la variedad de Picard". Para recuperar la curva, utilizando el teorema de Torelli es necesario tener un isomorfismo de variedades polarizadas.

4.6 Proposición. (Biswas, Brambila Paz [5]) — *La variedad $\mathfrak{M}_{H,X}(U)$ tiene cierta polarización canónico θ. Ahora, si para dos curvas X y X' se tiene $\big(\mathfrak{M}_{H,X}(U), \theta\big) \simeq \big(\mathfrak{M}_{H,X'}(U), \theta\big)$, entonces $X = X'$.*

Una vez fijado el determinante, existe una única polarización $\theta := \theta_\xi$.

Restringiendo al fibrado universal $U \to X \times \mathfrak{M}_\xi$ a una fibra sobre $x \in X$ se obtiene un fibrado $U_x := U_{|\{x\}\times\mathfrak{M}_\xi}$ sobre $\mathfrak{M}_\xi$. Vamos a describir el moduli $\mathfrak{M}_\theta(U_x)$ de todos los fibrados con invariantes iguales a los de U_x: el primero hecho es que U_x es θ-estable (se muestra utilizando que es simple y poliestable ...), luego, $U_x \in \mathfrak{M}_\theta(U_x)$. La dimensión se calcula como

$$\dim T_{U_x}(\mathfrak{M}_\theta(U_x)) = \dim H^1(\mathfrak{M}_\xi, \operatorname{End} U_x) = 1$$

Se tiene en este caso una función

$$\begin{array}{rcl} X & \overset{\sim}{\to} & \mathfrak{M}_\theta(U_x) \\ x & \mapsto & U_x \end{array}$$

que es un isomorfismo.

Hay otros fibrados naturales y importantes, por ejemplo el fibrado tangente $T\mathfrak{M}_\xi$, o el fibrado de Picard W_ξ definido da manera siguiente: considere la segunda proyección

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow & & \\ X \times \mathfrak{M}_\xi & \xrightarrow[p_2]{} & \mathfrak{M}_\xi \end{array}$$

entonces para d suficientemente grande (para que la imagen sea localmente libre) definimos

$$W_\xi := p_{2*}U,$$

que es llamado el *haz de Picard*, o el fibrado de Picard. Sobre este fibrado es

4.7 Conjetura. — El haz de Picard W_ξ es θ_ξ-estable, y tenemos el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pic}_0(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{M}_\theta(W_\xi) \\ L & \mapsto & p_{2*}(U \otimes p_1^* L) \end{array}$$

Brambila Paz, Hidalgo y Muciño [7] dan una condición necesaria y suficiente para que el fibrado de Picard sea polistable. Para rango > 2, supongamos que W_ξ es θ_ξ-estable, y sea K el núcleo del mapa $p_2^* W_\xi \to U$.

Dualizando e tensorizando por U obtenemos

$$0 \to U^* \otimes U \to p_2^* W_\xi^* \otimes U \to K^* \otimes U \to 0.$$

En la sucesión de cohomología, en caso de que los grupos $H^0(K^* \otimes U)$ y $H^1(K^* \otimes U)$ se anulan, se tiene el isomorfismo

$$H^1(\mathfrak{M}_\xi, \mathrm{End}(U)) \simeq H^1(\mathfrak{M}_\xi, \mathrm{End}(W_\xi)).$$

En caso de que los grupos $H^0(K^* \otimes U)$ y $H^1(K^* \otimes U)$ se anulan, se tiene que $\dim H^1(\mathfrak{M}_\xi, \mathrm{End}(W_\xi)) = g$. Si W_ξ es θ_ξ-estable entonces $\dim \mathfrak{M}_\theta(W_\xi) = g$. Para rango $r = 2$ tal situación pasa.

Referencias

[1] Arbarello, Cornalba, Griffiths, and Harris. *Geometry of Algebraic Curves.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[2] Balaji, V., Brambila Paz, L., and Newstead, P. E. Stability of the Poincaré bundle. *Math. Nach.* **188** (1997) 5–15.

[3] Bertram, ?., and Feinberg, ?. On stable rank 2 bundles with canonical determinant and many sections. Preprint

[4] Birkenhake, C., and Lange, H. *Complex Abelian Varieties.* Springer-Verlag, New York, 1996??.

[5] Biswas, I., Brambila Paz, L. Restriction of the Poincaré bundle and Calabi-Yau subvarieties. Preprint.

[6] Brambila Paz, L., Grzegorczyk, I., and Newstead, P. E. Geography of Brill-Noether loci for small slopes. *J. Alg. Geom.* **6** (1997), 645–669.

[7] Brambila Paz, L., Hidalgo, L., and Muciño, J. Restriction of the Picard bundle. Proceedings of the I Ibero-american Congress in Geometry, Olmué, Chile, 1998.

[8] Donaldson, ?. A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri. *J. Diff Geom.* **18** (1983), 269–277.

[9] Griffiths, P., and Harris, J. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley and Sons, New York, 1978.

[10] Gunning, R. *Lectures on Riemann Surfaces.* Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press, Princeton, 1966.

[11] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* No. 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.

[12] Kobayashi, S. *Differential Geometry of Complex Vector Bundles.* Princeton University Press, Princeton 1987.

[13] Li, Y. Spectral curves, theta divisors and Picard bundles. *Inter. J. Math.* **2** (1991), 525–550.

[14] Mehta, V., and Ramanathan, A. Semistable sheaves on projective varieties and restrictions to curves. *Math. Ann.* **258** (1982), 213–226.

[15] Mercat, V. Le problème de Brill-Noether pour des fibrés stables de petites pentes. Preprint, alg-geom/9704021.

[16] Mumford, D. *Geometric Invariant Theory.* Springer-Verlag, Heidelberg, 1965.

[17] Nag, S. *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces.* Wiley-Interscience, New York, 1988.

[18] Narasimhan, M. S., and Seshadri, C. S. Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface. *Ann. Math.* **82** (1965), 540–567.

[19] Newstead, P. E. *Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces.* Tata Institute Lecture Notes. Springer-Verlag, 1978.

[20] Seshadri, C. S. Theory of moduli. In *Algebraic Geometry, Arcata 1974*, Proc. Symp. Pure. Math. **29** (1975), 263–304.

[21] Teixidor i Bigas, M. Brill-Noether theory for stable vector bundles. *Duke. Math. J.* **62** (1991), 385–400.

[22] Uhlenbeck, K., and Yau, S.-T., On the existence of hermitian Yang-Mills connections on stable bundels over compact Kähler manifolds. *Comm. Pure. Appl. Math.* **39** (1986), S257–S293.