Cohomologie quantique tangentielle et nombres caractéristiques

par

JOACHIM KOCK

Ce résumé de ma thèse est une traduction d'un compte-rendu publié dans les *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **73** (2001), 319–326.

Ultérieurement, trois autres publications ont été issues de la thèse:

- T. GRABER, J. KOCK, R. PANDHARIPANDE, *Descendant invariants and characteristic numbers*, Amer. J. Math. **124** (2002), 611–647.
- J. KOCK, *Characteristic numbers of rational curves with cusp or prescribed triple contact*, Math. Scand. **92**, (2003), 223–245.
- J. KOCK, *Tangency quantum cohomology*, Compositio Math. **140** (2004), 165–178.

Cohomologie quantique tangentielle et nombres caractéristiques

Joachim Kock

Departamento de Matemática, Universidade Federal de Pernambuco
Cidade Universitária 50670-901 Recife – PE — Brasil

Manuscrit reçu le 2 février 2001; accepté pour publication le 17 avril 2001; présenté par Israel Vainsencher.

Résumé

Ce travail établit un lien entre la cohomologie quantique graviationnelle et la géométrie énumérative des courbes rationnelles (dans une variété homogène projective) assujetties à des conditions de nature infinitésimale, comme par exemple la tangence. Le concept clé est la notion de classes de psi modifiées, qui sont bien adaptées pour les questions énumératives et qui substituent les classes de psi tautologiques de la gravitation 2D. Les résultats principaux sont deux systèmes d'équations différentielles pour la fonction génératrice de certains produits top de telles classes. Une est la récurrence topologique tandis que l'autre est Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde (WDVV). Dans les deux cas, pourtant, la métrique riemannienne n'est plus la métrique de Poincaré usuelle, mais une certaine déformation de celle-ci, qui de manière remarquable codifie toute la combinatoire de la façon particulière dont les classes de psi modifiées se restreignent à la frontière. Cette machinerie est appliquée à plusieurs problèmes énumératifs, parmi lesquels les nombres caractéristiques dans une variété homogène projective quelconque, les nombres caractéristiques des courbes cuspidales, des courbes avec un contact triple prescrit ou des points doubles.

Mots clés: Géométrie énumérative, nombres caractéristiques, cohomologie quantique, invariants de Gromov-Witten.

1 Introduction

Cet article expose les idées et résultats principaux de la théorie de la *cohomologie quantique tangentielle*, développée dans la thèse de doctorat de l'auteur (Université Fédérale de Pernambuco, 2000), qui contient une exposition détaillée, des preuves complètes, et une multitude d'exemples.

1.1 Bref aperçu du contexte scientifique. Les problèmes les plus classiques de la géométrie énumérative sont ceux qui concernent le comptage de courbes assujetties à des conditions d'incidence et de tangence; les réponses à ces questions s'appellent *nombres caractéristiques*. Pendant la décennie passée, la discipline a vécu une véritable révolution instillée par des idées de la physique théorique. Le point de départ fut la découverte par M. Kontsevich (Kontsevich-Manin, 1994) que les nombres des courbes rationnelles dans $\mathbb{P}^2$ assujetties à des conditions d'incidence sont déterminés en tout degré par un ensemble d'équations différentielles qui exprime l'associativité du *produit quantique*, une nouvelle structure sur l'espace de cohomologie de $\mathbb{P}^2$, construite via des *applications stables*. La solution de Kontsevich pour ce problème centenaire est sans pareil en élégance — après tout, l'associativité est un des concepts plus fondamentaux de toutes les mathématiques.

Depuis cette découverte, les applications stables ont été utilisées aussi pour attaquer le problème, plus difficile, des nombres caractéristiques, et plusieurs solutions ont été trouvées pour les courbes rationnelles dans $\mathbb{P}^2$ (ou dans $\mathbb{P}^r$) (Pandharipande, 1999, Ernström-Kennedy, 1998 & 1999). Pourtant, ces solutions sont assez compliquées, et les théories dont elles sont issues n'ont pas de rapport apparente avec la physique.

Le travail présent rétablit ce rapport, et rend certains outils puissants de la *cohomologie quantique graviationnelle* disponible à la géométrie énumérative. Ceci résoud non seulement le problème des nombres caractéristiques d'une manière conceptuellement beaucoup plus simple, pour les variétés homogènes projectives *quelconques*, mais admet aussi une gamme de nouvelles applications de la théorie. Le résultat le plus surprenant est la construction d'un *produit quantique tangentiel*. Il s'agit d'une déformation du produit quantique usuel, basé sur des *classes de psi modifiées*. L'associativité de ce produit fournit une solution au problème des nombres caractéristiques aussi simple que la solution de Kontsevich pour la question concernant seulement les conditions d'incidence.

2 Classes de psi modifiées et classes diagonales

2.1 Le cadre. Soit X une variété homogène projective sur le corps des nombres complexes. Fixons une base $T_0, \ldots, T_r$ pour l'espace de cohomologie $H = H^*(X, \mathbb{Q})$.

Toutes les constructions auront lieu dans le champ $\overline{M}_{0,n}(X, \beta)$ des applications stables n-pointées de genre 0 à but X et de classe β. Dénotons par $\nu_i : \overline{M}_{0,n}(X,\beta) \to X$ le i-ème morphisme d'évaluation. Les images inverses des classes de cohomologie sur X via les morphismes d'évaluation sont appelées classes d'évaluation, et les produits top des classes d'évaluation sont les invariants de Gromov-Witten. Le lecteur se reportera à Fulton-Pandharipande (1997) pour les notions standard des applications stables, les invariants de Gromov-Witten, et la cohomologie quantique.

2.2 Classes de psi. La classe de psi tautologique $\boldsymbol{\psi}_i$ est la première classe de Chern du fibré en droites sur $\overline{M}_{0,n}(X,\beta)$ dont la fibre à un point de module $[\mu : C \to X]$ est la droite cotangente de C au i-ème point marqué. L'introduction des classes de psi dans les invariants de Gromov-Witten correspond dans la physique théorique à l'introduction de la gravitation dans les théories des champs quantiques (Witten, 1991). La théorie d'intersection des classes de psi est souvent appelée *cohomologie quantique graviationnelle* (Manin, 1999). Les classes de psi tautologiques ne sont pas compatibles avec les images inverses le long les morphismes d'oubli, et pour cette raison elles ne s'interprètent pas directement dans la géométrie énumérative. Pour ce faire, une modification des classes de psi est introduite.

2.3 Classes de psi modifiées. La *classe de psi modifiée* $\overline{\boldsymbol{\psi}}_i$ est définie pour $\beta > 0$ comme l'image inverse de la classe de psi usuelle $\boldsymbol{\psi}_i$ de l'espace 1-pointé $\overline{M}_{0,1}(X,\beta)$. La motivation pour cette définition est que plusieurs conditions de la géométrie énumérative admettent des expressions simples en termes des classes de psi modifiées, cf. §§5 et 6 en bas.

2.4 Classes diagonales. La ij-ème *classe diagonale* $\boldsymbol{\delta}_{ij}$ est par définition la somme de tous les diviseurs de la frontière ayant les marques p_i et p_j ensemble sur une branche contractante. Le nom est justifié par les propriétés basique suivantes des classes diagonales: en premier lieu, si π_i est le morphisme d'oubli du point marqué p_i, alors $\pi_{i*}\boldsymbol{\delta}_{ij} = 1$, la classe fondamentale. En second,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{ik} &= \boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{jk} \\ -\boldsymbol{\delta}_{ij}^2 = \boldsymbol{\delta}_{ij}\overline{\boldsymbol{\psi}}_i &= \boldsymbol{\delta}_{ij}\overline{\boldsymbol{\psi}}_j. \end{aligned}$$

Il suit que tous les produits top comportant des classes d'évaluation, des classes de psi modifiées, et des classes diagonales, s'expriment en termes des produits comportant seulement des classes d'évaluation et des classes de psi modifiées.

2.5 Formule clef. Les classes diagonales apparaissent comme des termes de correction lors de la restriction d'une classe de psi modifiée à un diviseur de la frontière D dont les deux branches sont de degré positif. Si D est l'image du morphisme de recollement

$$\rho_D : \overline{M}_{0,n'+1}(X,\beta') \times_X \overline{M}_{0,n''+1}(X,\beta'') \longrightarrow \overline{M}_{0,n}(X,\beta),$$

alors
$$\rho_D^* \overline{\boldsymbol{\psi}}_i = \overline{\boldsymbol{\psi}}_i + \boldsymbol{\delta}_{i\bullet},$$
où $\bullet$ dénote le point marqué du recollement.

3 Le potentiel quantique de tangence et la récurrence topologique

3.1 Le potentiel quantique de tangence. Définissons une *descendante énumérative* comme un produit top des classes de psi modifiées et des classes d'évaluation, et posons (pour $\gamma_i \in H$)

$$\langle\, \overline{\tau}_{k_1}(\gamma_1) \cdots \overline{\tau}_{k_n}(\gamma_n)\,\rangle_\beta := \int \overline{\boldsymbol{\psi}}_1^{k_1} \cup \nu_1^*(\gamma_1) \cup \cdots \cup \overline{\boldsymbol{\psi}}_n^{k_n} \cup \nu_n^*(\gamma_n) \cap [\overline{M}_{0,n}(X,\beta)].$$

D'intérêt particulier sont les *descendants énumératifs premiers*, c'est-à-dire ceux dont l'exposant de chaque classe de psi modifiée est égal ou inférieur à 1:

$$\langle\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_0^{\mathbf{a}}\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_1^{\mathbf{b}}\,\rangle_\beta := \langle\, \prod_{k=0}^{r} (\overline{\tau}_0(T_k))^{a_k} (\overline{\tau}_1(T_k))^{b_k}\,\rangle_\beta.$$

La fonction génératrice de ces invariants est appelée le *potentiel quantique de tangence*:

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{\beta>0} \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{a}}}{\mathbf{a}!} \frac{\mathbf{y}^{\mathbf{b}}}{\mathbf{b}!} \langle\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_0^{\mathbf{a}}\, \overline{\boldsymbol{\tau}}_1^{\mathbf{b}}\,\rangle_\beta.$$

Ici $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_r)$ et $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_r)$ sont des paramètres formels, et utilisons la notation standard des multi-indices $\mathbf{a}! = a_0!a_1!\cdots a_r!$, et $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$. Les variables $\mathbf{x}$ sont les variables formelles usuelles de la cohomologie quantique, donc pour $\mathbf{y}$ égal à zéro, Γ se réduit à (la partie quantique) du potentiel de Gromov-Witten en genre 0.

3.2 Déformation de la métrique de Poincaré. Tandis que le potentiel quantique usuel est basé sur la trace $\int_{\mathbf{0}} : H \to \mathbb{Q}$ (intégration sur la classe fondamentale) et la métrique de Poincaré $g_{ij} = \int_{\mathbf{0}} T_i \cup T_j$, le potentiel quantique de tangence est plus naturellement an relation avec une déformation de ces structures, une certaine "métrique" à valeurs dans $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$. La trace déformée est

$$\int_{\mathbf{y}} \mathbf{z} \ := \ \sum_{\mathbf{s}} \frac{(-2\mathbf{y})^{\mathbf{s}}}{\mathbf{s}!} \int_{\mathbf{0}} \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \cup \mathbf{z}, \qquad\qquad \mathbf{z} \in H,$$

et la nouvelle métrique est donnée par

$$\gamma_{ij} := \int_{\mathbf{y}} T_i \cup T_j.$$

Soit (γ^{ij}) la matrice inverse de (γ_{ij}).

3.3 Récurrence topologique. Comme $\overline{\boldsymbol{\psi}}_i$ admet une expression en termes des diviseurs de la frontière, il existe une sorte de récurrence topologique. Observons pourtant qu'en contraste avec la récurrence topologique des classes de psi usuelles (Witten, 1991), la Formule Clef 2.5 introduit une multitude de classes diagonales qui doivent être éliminées comme expliqué dans 2.4. Par miracle, la métrique déformée codifie toute cette combinatoire des classes diagonales. Posons $\Gamma_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma$ et $\Gamma_{(x_i x_j)} := \sum_{k=0}^{r} g_{ije} g^{ef}\ \Gamma_{x_f}$ (le dérivé dans la direction $T_i \cup T_j$). Alors, *Le potentiel de tangence satisfait les équations différentielles*

$$\Gamma_{y_k x_i x_j} = \Gamma_{x_k (x_i x_j)} - \Gamma_{(x_k x_i) x_j} - \Gamma_{(x_k x_j) x_i} + \sum_{e,f}\ \Gamma_{x_k x_e}\ \gamma^{ef}\ \Gamma_{x_f x_i x_j}.$$

Ces équations déterminent tous les descendants énumératifs premiers à partir des invariants de Gromov-Witten.

4 Produit de tangence et structure de Frobenius

4.1 Le produit quantique de tangence. Définissons une multiplication sur $H \otimes \mathbb{Q}[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$ par la loi

$$T_i * T_j := T_i \cup T_j + \sum_{e,f}\ \Gamma_{ije}\ \gamma^{ef}\ T_f.$$

Ici et dans la suite, pour simplicité, posons $\Gamma_i = \Gamma_{x_i}$.

Maintenant le résultat important est que ce *produit quantique de tangence* est associatif. La preuve suit la preuve de l'associativité du produit quantique usuel (cf. Fulton-Pandharipande, 1997), et encore une fois, la métrique déformée entre dans les termes quadratiques pour codifier la combinatoire des classes diagonales. (Dans le cas particulier de $X = \mathbb{P}^2$, ce produit avait déjà été construit avec des méthodes ad hoc par Ernström et Kennedy (1999).)

4.2 Structure de Frobenius. De l'observation $T_i \cup T_j = \sum \gamma_{ije} \gamma^{ef} T_f$, il suit que si nous prolongeons le potentiel quantique de tangence au cas $\beta = 0$ en posant

$$\Phi \ := \ \Gamma \ + \ \sum_{i,j,k} \frac{x_i x_j x_k}{3!} \int_{\mathbf{y}} T_i \cup T_j \cup T_k,$$

alors le produit quantique de tangence s'écrit

$$T_i * T_j = \sum_{e,f} \Phi_{ije} \ \gamma^{ef} \ T_f,$$

et l'équation de l'associativité devient

$$\sum_{e,f} \ \Phi_{ije} \ \gamma^{ef} \ \Phi_{fk\ell} = \sum_{e,f} \ \Phi_{jke} \ \gamma^{ef} \ \Phi_{fi\ell}.$$

Il découle facilement de ces constructions que *Le* $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*-module de cohomologie* $H[[\mathbf{y}]]$ *avec accouplement bilinéaire non-dégénéré* $\gamma : H[[\mathbf{y}]] \otimes H[[\mathbf{y}]] \to \mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*, équipé avec le potentiel quantique de tangence* $\Phi \in \mathbb{Q}[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$ *constitue une variété de Frobenius formelle sur* $\mathbb{Q}[[\mathbf{y}]]$*.* (Voir Manin (1999) pour la définition et la théorie des variétés de Frobenius.)

5 Nombres caractéristiques

5.1 Conditions de tangence. Soit $Z \subset X$ une hypersurface très ample, et soit $\boldsymbol{\eta}_i$ l'image inverse de la classe de Z le long du i-ème morphisme d'évaluation. Maintenant on montre que le lieu des applications stables qui sont tangentes à Z au i-ème point marqué est de classe

$$\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i).$$

La preuve dépend d'une construction des fibrés de parties principales, de la formule de Porteous, et d'un argument de transversalité. En plus, les intersections top de tels lieux sont transversales pour des hypersurfaces générales, donc les nombres caractéristiques s'expriment comme des produits top des classes de psi modifiées et des classes d'évaluation.

5.2 Potentiel des nombre caractéristiques et changement de coordonnées. Soit G la fonction génératrice pour les nombres caractéristiques des courbes rationnelles dans X. Un argument combinatoire montre que G est obtenu à partir de Γ par un changement linéaire de coordonnées. Ainsi, une application facile de la règle de la chaîne traduit les équations de 3.3 et 4.1 dans des équations différentielles pour G qui déterminent complètement les nombres caractéristiques à partir des nombres issus seulement des conditions d'incidence (c'est-à-dire les invariants de Gromov-Witten).

5.3 Exemple: les courbes planes. Pour fixer les idées, soit $N_d(a,b,c)$ le nombre des courbes planes rationnelles de degré d qui passent par a points, qui sont tangentes à b droites, et qui sont tangentes à c droites à points spécifiés (avec $a+b+2c=3d-1$). Le potentiel des nombres caractéristiques

$$G(s,u,v,w)=\sum_{d>0}\exp(ds)\sum_{a,b,c}\frac{u^a}{a!}\frac{v^b}{b!}\frac{w^c}{c!}\ N_d(a,b,c)$$

est en relation avec le potentiel quantique de tangence Γ par

$$G(s,u,v,w)=\Gamma(x_1,x_2,y_1,y_2),$$

selon le changement de variables

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & x_1 &= s & x_2 &= u+v \\ y_0 &= 0 & y_1 &= v & y_2 &= w \end{aligned}$$

La métrique déformée est

$$(\gamma^{ef})=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2y_1 \\ 1 & 2y_1 & 2y_1^2+2y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2v \\ 1 & 2v & 2v^2+2w \end{pmatrix},$$

et 3.3 se traduit dans la équation différentiell suivante, satisfaite par G.

$$G_{vs}=G_{us}-G_u+\tfrac{1}{2}G_{ss}G_{ss}+2vG_{ss}G_{us}+(v^2+w)G_{us}G_{us}.$$

6 Autres applications

6.1 Corrections en codimension 2. Dans plusieurs applications, les courbes avec un point double marqué font une contribution où elle ne le devraient pas. Soit Π_1 la somme de tous les cycles de codimension 2 dont la branche centrale a degré 0 et porte le point marqué p_1, et dont le deux branches extérieures ont degré positif. Le potentiel pour les "descendants énumératifs premiers intégrés contre Π_1" est en relation avec Γ par une équation différentielle quadratique, parce qu'une intégrale sur Π_1 s'exprime comme un produit d'intégrales correspondant à ses branches. (Une observation similaire s'applique au potentiel des "descendants énumératifs premiers intégrés contre un facteur $\overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2$": ceci est une conséquence d'un pas de la récurrence topologique.)

6.2 Courbes cuspidales. Raffinant les techniques des classes de psi modifiées avec des considérations des classes Π donne aussi les nombres caractéristiques des courbes rationnelles cuspidales (dans $\mathbb{P}^2$ ou dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$). Par exemple, pour $\mathbb{P}^2$, le lieu des courbes ayant un cusp au premier point marqué se révèle être de classe

$$3\boldsymbol{\eta}_1^2 + 3\boldsymbol{\eta}_1\overline{\boldsymbol{\psi}}_1 + \overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2 - \Pi_1.$$

Dans le contexte cuspidal, la formule pour la tangence 5.1 n'est plus correcte, parce qu'un cusp qui s'envoie sur la droite fixée comptera comme une tangence tandis que cette situation n'est pas une limite d'une tangence honnête. La formule correcte dans ce cas est

$$\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i - \boldsymbol{\delta}_{1i}).$$

Maintenant le problème des nombres caractéristiques est résolu comme suit. Premièrement, les classes diagonales sont déployées en utilisant les formules de 2.4, puis les équations différentielles pour les potentiels enrichis de 6.1 sont utilisées pour éliminer Π_1 et $\overline{\boldsymbol{\psi}}_1^2$. Le résultat final de ces manipulations sont trois équations différentielles qui déterminent de manière effective les nombres caractéristiques cuspidaux à partir de nombres caractéristiques usuels.

6.3 D'autres exemples. Plusieurs autres conditions admettent une description simple en termes des classes introduites plus haut. Par exemple, le lieu des applications stables qui ont un contact d'ordre 3 avec une hypersurface donnée $V \subset \mathbb{P}^r$ est de classe $\boldsymbol{\eta}_i(\boldsymbol{\eta}_i + \overline{\boldsymbol{\psi}}_i)(\boldsymbol{\eta}_i + 2\overline{\boldsymbol{\psi}}_i) - [\mathrm{I}_i]_3 - \boldsymbol{\eta}_i\Pi_i$. (Ici $[\mathrm{I}_i]_3$ dénote une certaine correction consistant en des applications stables à deux branches avec une branche linéaire s'envoyant sur V, mais cette correction ne contribue pas dans la formule finale.) Le lieu des applications stables sécantes à un plan de codimension 2 (à p_1 et à p_2) est de classe $\boldsymbol{\eta}_1^2\boldsymbol{\eta}_2^2 - \boldsymbol{\delta}_{12}\big(2\boldsymbol{\eta}_1^3 + \boldsymbol{\eta}_1^2\overline{\boldsymbol{\psi}}_1\big) - \boldsymbol{\eta}_1^2\Pi_{12}$. (Dans $\mathbb{P}^2$, ceci est le lieu des courbes avec un point double spécifié.) Couper ce lieu avec $\boldsymbol{\delta}_{12}$ force les deux point de sécance à coïncider, et nous trouvons la classe de tangence à un plan de codimension 2.

Remerciement

Les études de doctorat de l'auteur ont été financées par le Conseil de Recherche en Sciences Naturelles du Danemark, qui est remercié avec reconnaissance. L'auteur est aussi reconnaissant auprès du Departamento de Matemática de l'Universidade Federal de Pernambuco pour quatre ans splendides, et en particulier auprès de son directeur de thèse Israel Vainsencher pour ses conseils et son encouragement.

Bibliographie

[1] L. Ernström and G. Kennedy. *Recursive formulas for the characteristic numbers of rational plane curves.* J. Alg. Geom. **7** (1998), 141–181. (alg-geom/9604019).

[2] L. Ernström and G. Kennedy. *Contact cohomology of the projective plane.* Amer. J. Math. **121** (1999), 73–96. (alg-geom/9703013).

[3] W. Fulton and R. Pandharipande. *Notes on Stable Maps and Quantum Cohomology.* In J. Kollár, R. Lazarsfeld and D. Morrison, editors, *Algebraic Geometry, Santa Cruz 1995*, vol. 62, II of Proc. Symp. Pure. Math. (1997), pp. 45–96. (alg-geom/9608011).

[4] J. Kock. *Tangency quantum cohomology and enumerative geometry of rational curves.* PhD thesis, Recife, Brazil, March 2000. Available at `http://www-math.unice.fr/~kock/GW/TESE.ps`.

[5] M. Kontsevich and Yu. I. Manin. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.* Comm. Math. Phys. **164** (1994), 525–562. (hep-th/9402147).

[6] Yu. I. Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces.* AMS Colloquium Publications, Providence, RI, 1999.

[7] R. Pandharipande. *Intersections of $\mathbb{Q}$-divisors on Kontsevich's moduli space $\overline{M}_{0,n}(\mathbb{P}^r, d)$ and enumerative geometry.* Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 1481–1505. (alg-geom/9504004).

[8] E. Witten. *Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space.* Surveys in Diff. Geom. **1** (1991), 243–310.