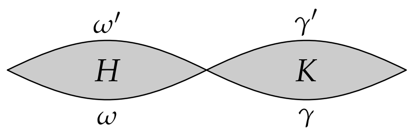
Topologia II
Llista de problemes número 1 (per al 2005-09-30)

1. Siguin ω i ω' dos camins homòtops amb inici x_0 i fi x_1. Sigui γ un camí qualsevol amb inici x_1. Demostreu que $\omega.\gamma \simeq \omega'.\gamma$. (Donada una homotopia explícita $H : \omega \simeq \omega'$, construïu una homotopia explícita $\omega.\gamma \simeq \omega'\gamma$ (que convén escriure $H.\gamma$).)

   Copieu la demostració per a provar un enunciat anàleg per a la situació on γ ve abans d'els ω i ω'.

2. Generalitzant el exercici anterior, donades homotopies $H : \omega \simeq \omega'$ i $K : \gamma \simeq \gamma'$ (on $\omega(1) = \omega'(1) = \gamma(0) = \gamma'(0)$)



   construïu una homotopia $H.K$ de $\omega.\gamma$ a $\omega'.\gamma'$ que anomenarem la *composició horitzontal* de H i K.

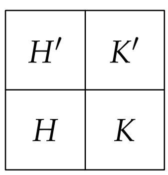
3. La composició de dues homotopies com en Proposició 1.1.3 és anomenada *composició vertical*, i és notada amb mera juxtaposició. Proveu que la composició horitzontal (definida en el exercici anterior) és compatible amb la composició vertical en el sentit següent: Donats camins ω, ω', ω'' de x_0 a x_1 i altres tres camins γ, γ', γ'' de x_1 a x_2, i donades quatre homotopies

$$\begin{array}{rl} H' : \omega' \simeq \omega'' & \quad K' : \gamma' \simeq \gamma'' \\ H : \omega \simeq \omega' & \quad K : \gamma \simeq \gamma' \end{array}$$

   aleshores

$$(H.K)(H'.K') = (HH').(KK').$$

   Aquesta figura pot ser útil:



4. Demostreu que les dues afirmacions següents són equivalents per a un espai X donat:
   (i) Dos camins qualssevol que comencen en un punt x_0 i acaben en un altre punt x_1 són homòtops.
   (ii) Tot camí que comença i acaba en un mateix punt és homòtop al camí constant.

5. **(Examen de Juliol de 2003.)** Siguin $0 < k < 1$, α i β dos camins a un espai topològic X amb $\alpha(1) = \beta(0)$. Definim

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{t}{k}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq k \\ \beta\left(\frac{t-k}{1-k}\right) & \text{si} \quad k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Demostreu que $\omega \simeq \alpha \cdot \beta$.

6. Siguin ω i ω' dos camins $I \to X$ de un subespai $X \subset \mathbb{R}^n$ amb $\omega(0) = \omega'(0)$ i $\omega(1) = \omega'(1)$, tals que per a tot $s \in I$ el segment $\overline{\omega(s)\omega'(s)}$ està contingut a X. Demostreu que ω i ω' son homòtops.

Uns exercicis tractant d'una noció de homotopia prima.

7. Sigui $\phi : I \to I$ una aplicació que preserva els extremitats (i.e. $\phi(0) = 0$ i $\phi(1) = 1$). Altrament dit, ϕ és un camí de I amb inici igual a 0 i fi igual a 1. Demostreu que ϕ és homòtop al camí donat per la funció identitat $I \to I$, $s \mapsto s$.

   Pista: utilitzeu el exercici anterior.

8. Si $\omega : I \to X$ és un camí, i si $\phi : I \to I$ és una aplicació que preserva els extremitats, aleshores $\omega \circ \phi$ és novament un camí amb els mateixos inici i fi. Demostreu que $\omega \circ \phi$ és homòtop a ω.

9. Definició. Una *homotopia prima* entre dos camins ω i ω' és una homotopia que es pot realitzar de la forma del exercici anterior, per un homeomorfisme $\phi : I \to I$. Precisament, ω i ω' són prim-homòtops si existeix un homeomorfisme $\phi : I \to I$ tal que aquest diagrama commuta:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\omega'"'] & & I \arrow[dl, "\omega"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   En altres paraules, ω i ω' són iguals llevada reparametrització.

   Demostreu que "ser prim-homòtops" és una relació d'equivalència. El exercici anterior mostra que aquesta relació d'equivalència és més fina que la relació d'homotopia.

10. Demostreu que composició de camins és una operació associativa llevada homotopia prima. (En la demostració de la Proposició 1.1.6 vam veure que la operació és associativa llevat homotopia. El argument pot fàcilment ser refinat per a donar l'enunciat més fort d'homotopia prima.)

Alguns exercicis donant un punt de vista més categòric.

11. Sigui $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un functor entre dues categories. Demostreu que si $\varphi : X \to Y$ és una fletxa invertible en $\mathscr{C}$ aleshores $F(\varphi) : FX \to FY$ és invertible en $\mathscr{D}$. (Aquest fet general immediatament implica Corol·lari 1.2.2.)

12. Sigui $\mathscr{C}$ una categoria qualsevol. Una fletxa $r : X \to A$ es diu una *retracció* si existeix una fletxa $i : A \to R$ tal que $r \circ i = \mathrm{id}_A$.

    A més, un objecte A es diu *retracte* de un objecte X si existeix una retracció $r : X \to A$.

    Demostreu que tot functor preserva retraccions. (Així generalitza Corol·lari 1.2.3.)

Els exercicis següents expliquen una versió una mica més general de la relació entre espais topològics i grups.

En Observació 1.1.7 podem llegir: *El conjunt de classes d'homotopia de camins d'un espai X compleix tots els axiomes de grup, llevat que el producte de dues classes no sigui sempre definit.* Un *grupoide* és justament un conjunt amb una tal composició parcialment definida. La definició de grupoide no és difícil, i és fácil reformular els resultats basics en aquest llenguatge. És una mica més satisfactori perquè grupoides tén una aparença mol més topològica que grups.

Definició. Un *grupoide* és una categoria on totes les fletxes són invertibles.

Exemple. Sigui ***Bij*** la categoria on els objectes són els conjunts finits i on les fletxes són les bijeccions. És clar que ***Bij*** és un grupoide.

13. La *categoria interval* és la categoria $I = \{0 \to 1\}$ que té dos objectes, denominats 0 i 1, i una sola fletxa $0 \to 1$, llevat les fletxes identitats dels dos objectes.

    Un *camí* en un grupoide G és un functor $\gamma : I \to G$. Diguem que el objecte $\gamma(0)$ és el inici del camí i que el objecte $\gamma(1)$ és el fi del camí. Demostreu que un camí és essencialment el mateix que una fletxa.

    Utilitzeu la composició en la categoria per a definir una composició de camins.

14. Utilitzeu el fet que G és un grupoide per a demostrar que els camins tancats que comencen i terminen en un objecte x formen un grup, denominat $\pi(G, x)$. Aquest grup no és res més que $\mathrm{End}_G(x)$.

    Per tant, donat un grupoide, cada objecte defineix un grup.

15. Un grupoide G és *arc-connex* si per a cada parell de objectes $x, y \in G$ existeix una fletxa $x \to y$. Demostreu que se G és arc-connex aleshores $\pi(G, x) \simeq \pi(G, y)$ per a tots objectes x i y.

    Pista: copieu la demostració de la Proposició 1.1.9. (De fet, aquest exercici se pot veure com una generalització de 1.1.9.)

16. Recíprocament, qualsevol grup G pot ser considerat un grupoide amb un sol objecte $*$: les fletxes $* \to *$ són els elements del grup, i la composició és definida per multiplicació en G. Aquesta observació es torna més clara, potser, tenint en ment el exemple següent:

    Sigui S un conjunt finit. El grup simètric $\mathfrak{S}(S)$ és el grup de totes les bijeccions del conjunt S a si mateix. Així, es pot diure que $\mathfrak{S}(S)$ és igual a $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Bij}}(S)$. És la subcategoria (subgrupoide) de ***Bij*** qui comprén sol el objecte S. Així veiem que el grup simètric (de un conjunt finit fixat) és un subgrupoide de ***Bij***.

Veiem que hi ha una analogia entre espais topològics i grupoides, i més encara, grups són casos especials de grupoides.

17. *El grupoide fonamental de un espai topològic.* Donat un espai topològic X definiu un grupoide $\Pi(X)$ així: els objectes de $\Pi(X)$ són els punts de X. Les fletxes de $\Pi(X)$ són les classes de homotopia de camins de X. Aleshores tota fletxa té un inici i un fi, i podem compondre dos camins si el fi del primer és igual al inici del segon. El grup fonamental $\pi(X, x)$ basat en un punt $x \in X$ es identifica amb $\mathrm{End}_{\Pi(X)}(x)$.