Topologia II
Llista de problemes número 10 (per al 2005-12-16)

Els exercicis 1 a 3 són copiats de la llista 9.

Tranformacions de cobertes. Sigui $p : Y \to X$ una projecció recobridora. Una *tranformació de cobertes* (deck transformation) és un homeomorfisme $f : Y \to Y$ compatible amb p, en el sentit que comuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Denotem per $\mathrm{Aut}(Y/X)$ el grup de totes les transformacions de cobertes.

1. Mostreu que si $p : Y \to X$ és un recobriment trivial de n fulls, i si X és connex, llavors $\mathrm{Aut}(Y/X) \simeq \mathfrak{S}_n$ (el grup simètric en n lletres).

2. Donat un G-recobriment $Y \to Y/G = X$, demostreu que el homomorfisme de grups natural $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és injectiu.

3. Continuant la notació del exercici anterior, mostreu que si Y és connex, llavors $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és un isomorfisme.

   (Pista: utilitzeu *l'unicidad d'elevació d'aplicacions*, Exercici 11 de la llista 9.)

4. Demostreu que si $f \colon \widetilde{X} \to X$ i $g \colon \widetilde{Y} \to Y$ són projeccions recobridores llavors $f \times g \colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ també és una projecció recobridora.

5. (i) Mostreu que S^n és un espai recobridor de $\mathbb{R}P^n$.

   (ii) Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^n$.

6. Calculeu, llevat d'isomorfisme, tots els espais recobridors dels espais projectius $\mathbb{R}P^n$ de dimensions $n \geq 2$. (El cas $n = 1$ és tractat en el exercici següent.)

7. Calculeu, llevat d'isomorfisme, tots els espais recobridors del cercle.

8. Sigui X un espai connex amb $\pi(X) \simeq \mathbb{Z}$, i sigui $p : \widetilde{X} \to X$ un recobriment de n fulls. Calculeu $\pi(\widetilde{X})$ i calculeu $\pi(p)$.

9. Descriviu una aplicació recobridora de 4 fulls del tor $S^1 \times S^1$ sobre l'ampolla de Klein.

10. *Examen de juliol de 2003.* Siguin X, Y i Z espais arc-connexos i localment arc-connexos, $q : X \to Y$ i $t : Y \to Z$ aplicacions contínues, $p = r \circ q$. Demostreu que si p i r són aplicacions recobridores aleshores:

    (i) q és també una aplicació recobridora.

    (ii) Si Z té espai recobridor universal, també el tenen X i Y.