Topologia II
Llista de problemes número 12 (per al 2006-01-20)

Els exercicis 2-9 són copiats de llistes anteriors.

Totes les aplicacions són suposades contínues.

1. Doneu la definició de
   - (i) Camí; producte de camins
   - (ii) Retracte
   - (iii) Homotopia entre dues aplicacions
   - (iv) Equivalència homotòpica d'espais
   - (v) Contràctil
   - (vi) Grup fonamental
   - (vii) Functor [1]
   - (viii) Simplement connex
   - (ix) Grau d'una aplicació $S^1 \to S^1$
   - (x) Aplicació senar
   - (xi) Generadors i relacions d'un grup
   - (xii) Producte lliure de grups
   - (xiii) Pushout de grups; pushout de espais
   - (xiv) Adjuntar una cel·la
   - (xv) Arbre
   - (xvi) Recobriment (= aplicació recobridora = espai recobridor)
   - (xvii) Equivalència de recobriments
   - (xviii) Acció d'un grup sobre un espai
   - (xix) Acció pròpiament discontínua
   - (xx) G-recobriment

2. (i) Siguin $f, g : X \to Y \subset \mathbb{R}^n$ dues aplicacions contínues, tals que per a tot $x \in X$ el segment $\overline{f(x)g(x)}$ està contingut a Y. Demostreu que f i g són homòtopes.
   (ii) (Exercici 1.2.7 (b).) Siguin $f, g : X \to S^m$ dues aplicacions contínues tals que per a tot $x \in X$, $f(x)$ i $g(x)$ no són antipodals. Demostreu que $f \simeq g$.

3. Sigui $f : S^1 \to X$ una aplicació homòtopa a una aplicació constant. Demostreu que existeix una aplicació contínua $g : E^2 \to X$ extenant f. És a dir que $g|_{S^1} = f$:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[dr, "f"'] & \subset & E^2 \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   Pista: Defineu $E^2 \to I \times S^1$ utilitzant el valor absolut, el argument i l'homotopia donada.

[1]diguem, de $\boldsymbol{Top}_*$ a $\boldsymbol{Grp}$, on $\boldsymbol{Top}_*$ és la categoria d'espais topològics amb punt base i aplicacions contínues que conserven el punt-base, i $\boldsymbol{Grp}$ és la categoria de grups i homomorfismes de grups

4. *(Examen de juliol de 2003.)* Sigui A qualsevol espai topològic connex. Demostreu que:
   (i) El con $CA = (A \times I)/(A \vee I)$ és contràctil.
   (ii) Una aplicació contínua $f : A \to B$ és homotòpicament nul.la si i només si f s'estén a una aplicació contínua a CA.
   (iii) L'espai suspensió $\Sigma A = (A \times S^1)/(A \vee S^1)$ és simplement connex.

5. En una categoria qualsevol, donat un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & C' \arrow[d] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

on els dos quadrats són pushouts, demostreu que el gran rectangle és un pushout també.

6. Sigui C el cercle $S^1 \times \{e\} \subset T = S^1 \times S^1$, i sigui Q el quocient de T obtingut col·lapsant C. Calculeu el grup fonamental de Q.

7. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys un punt.

8. Sigui L una recta de $\mathbb{R}^3$. Calculeu el grup fonamental de $X := \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$.

   Pista: utilitzeu el regla del producte.

9. Sigui $G' \leq G$ un subgrup. Suposem que tenim una acció propiament discontínua de G sobre un espai Y, amb projecció recobridora $p : Y \to Y/G$. Llavors tenim també una acció de G' sobre Y, i per tant altra projecció recobridora $p' : Y \to Y/G'$, i una aplicació induïda $q : Y/G' \to Y/G$:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Y/G' \arrow[rr, "q"'] & & Y/G. \end{tikzcd}$$

Demostreu que q és una projecció recobridora.