Topologia II
Llista de problemes número 2 (per al 2005-10-07)

Els exercicis 1, 2, 3, 4 són copiats de la llista 1.

1. **(Examen de Juliol de 2003.)** Siguin $0 < k < 1$, α i β dos camins a un espai topològic X amb $\alpha(1) = \beta(0)$. Definim

$$\omega(t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{t}{k}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq k \\ \beta\left(\frac{t-k}{1-k}\right) & \text{si} \quad k \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   Demostreu que $\omega \simeq \alpha \cdot \beta$.

2. Siguin ω i ω' dos camins $I \to X$ de un subespai $X \subset \mathbb{R}^n$ amb $\omega(0) = \omega'(0)$ i $\omega(1) = \omega'(1)$, tals que per a tot $s \in I$ el segment $\overline{\omega(s)\omega'(s)}$ està contingut a X. Demostreu que ω i ω' son homòtops.

3. Sigui $\phi : I \to I$ una aplicació que preserva els extremitats (i.e. $\phi(0) = 0$ i $\phi(1) = 1$). Altrament dit, ϕ és un camí de I amb inici igual a 0 i fi igual a 1. Demostreu que ϕ és homòtop al camí donat per la funció identitat $I \to I$, $s \mapsto s$.

   Pista: utilitzeu el exercici anterior.

4. Si $\omega : I \to X$ és un camí, i si $\phi : I \to I$ és una aplicació que preserva els extremitats, aleshores $\omega \circ \phi$ és novament un camí amb els mateixos inici i fi. Demostreu que $\omega \circ \phi$ és homòtop a ω.

5. Utilitzant el exercici anterior, doneu una solució alternativa del Exercici 1, sense escriure cap homotopia explícita.

6. En Exemple 1.2.6 és observat que dos camins homòtops com camins també són homòtopas com aplicacions contínues. En efecte, qualsevol homotopia entre camins també és una homotopia de les aplicacions contínues.

   Més generalment, demostreu que qualssevol dos camins $\omega, \omega' : I \to X$ amb $\omega(0) = \omega'(0) = x_0$ son homòtops com aplicacions contínues.

   Pista: Mostreu que ambdues són homòtopas a la aplicació constant x_0.

La relació entre homotopia de camins i homotopia d'aplicacions contínues és donada en termes de la noció d'*homotopia relativa*: Sigui $A \subset X$ un subespai. Dues aplicacions contínues $f, f' : X \to Y$ amb $f(x) = f'(x)$ per a tot $x \in A$ son *homòtopes relativament a A* si existeix una homotopia $H : I \times X \to Y$ tal que $H(t, x) = f(x) = f'(x)$ per a tot $t \in I$ i tot $x \in A$. Ara, la noció d'homotopia de camins és res més que homotopia relativa al subespai $S^0 \subset I$ consistent en els punts extremitats.) La noció d'homotopia d'aplicacions contínues en el sentit de 1.2.5 és homotopia relativa al subespai buit.

7. (Generalitzant Exercici 2.) Siguin $f, f' : X \to Y \subset \mathbb{R}^n$ dues aplicacions contínues [que coinciden sobre un subespai $A \subset X$], tals que per a tot $x \in X$ el segment $\overline{f(x)f'(x)}$ està contingut a Y. Demostreu que f i f' son homòtopes [relativament a A].

8. Demostreu les afirmacions següents.
   (i) Si $f \simeq f' : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ llavors $g \circ f \simeq g \circ f'$.
   (ii) Si $f : X \to Y$ i $g \simeq g' : Y \to Z$ llavors $g \circ f \simeq g' \circ f$.
   (iii) (Exercici 1.2.7 (a).) Si $f \simeq f' : X \to Y$ i $g \simeq g' : Y \to Z$ llavors $g \circ f \simeq g' \circ f'$.

9. (Exercici 1.2.7 (b).) Siguin $f, f' : X \to S^m$ dues aplicacions contínues tals que per a tot $x \in X$, $f(x)$ i $f'(x)$ no són antipodals. Demostreu que $f \simeq f'$.

   Pista: utilitzant Exercici 7, construïu primer una homotopia en $\mathbb{R}^{m+1} \smallsetminus \{0\} \supset S^m$. Despres, projecteu per a S^m. (Així, esteu utilitzant que S^m és un retracte de $\mathbb{R}^{m+1} \smallsetminus \{0\}$.)

10. Demostreu que E^2 és contràctil. (I.e., l'aplicació identitat $E^2 \to E^2$ és homòtopa a una aplicació constant).

11. Sigui $f : S^1 \to X$ una aplicació homòtopa a una aplicació constant. Demostreu que existeix una aplicació contínua $g : E^2 \to X$ extenant f. És a dir que $g|_{S^1} = f$:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, "f"'] & E^2 \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   Pista: Defineu $E^2 \to I \times S^1$ utilitzant el valor absolut, el argument i l'homotopia donada.

12. Recíprocament, sigui $f : S^1 \to X$ una aplicació contínua amb una extension $g : E^2 \to X$ com en el exercici anterior. Demostreu que f és homòtopa a una aplicació constant.

   Pista: Utilitzeu Exercici 8 i Exercici 10.

13. Generalitzant el exercici anterior, demostreu que toda aplicació contínua que factoritza a través d'un espai contràctil és homòtopa a una aplicació constant.