Topologia II
Llista de problemes número 4 (per al 2005-10-21) (Versió correcta)

1. Definició: Un espai topològic X es diu gaudir del *propietat del punt fix* si tota aplicació contínua $f : X \to X$ té un punt fix.

   Demostreu que si X té el propietat del punt fix aleshores tot retracte $A \subset X$ també té el propietat del punt fix.

2. Demostreu que si X té el propietat del punt fix, llavors tot espai homeomorfe també ho té. Demostreu que la propietat no és un invariante de homotopia. És dir, doneu un exemple de dos espais homotopicament equivalents tals que un espai té el propietat i l'altre no. Pista: considereu $\mathbb{R}^n$.

   Definició: una aplicació contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^k$ és *senar* si $f(-x) = -f(x)$.

3. Anàlog 1-dimensional de Borsuk-Ulam (Corol·lari 2.2.11 i Corol·lari 2.2.12).

   (i) Demostreu que tota aplicació senar $S^1 \to \mathbb{R}$ té un zero.

   (ii) Demostreu que si $f : S^1 \to \mathbb{R}$ és una aplicació contínua existeixen sempre dos punts antipodals amb la mateixa imatge.

4. Definició: siguin γ_0 i γ_1 dos llaços, no necessariament amb el mateix punt de base. Una *homotopia de llaços* entre γ_0 i γ_1 és una homotopia

   $$H : I \times I \to X$$

   tal que tots els camins intermediaris $\gamma_t := H(-, t)$ són llaços també.

   Demostreu que si

   $$I \underset{\gamma_0}{\overset{\gamma_1}{\rightrightarrows}} S^1$$

   són dos llaços homòtops com llaços, aleshores tén el mateix grau.

5. Sigui $\varphi : S^1 \to S^1$ una aplicació contínua. Definim el seu grau per la següent: agafa una parametrització $\gamma : I \to S^1$ de grau 1, i defineix

   $$\deg(\varphi) := \deg(\varphi \circ \gamma)$$

   Demostreu que aquesta definició no depèn de γ.

pre-6. Considerant $S^1 \subset \mathbb{C}$, demostreu que l'aplicació $z \mapsto z^k$ té grau k, per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

6. Donades dues aplicacions contínues

   $$S^1 \xrightarrow{f} S^1 \xrightarrow{g} S^1$$

   demostreu que

   $$\deg(g \circ f) = \deg f \cdot \deg g.$$

7. Una aplicació contínua $f : S^n \to \mathbb{R}^k$ es diu *parell* si $f(-s) = f(s)$ per a tot $s \in S^n$. Demostreu que tota aplicació parell $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ té grau parell. Pista: de 0 a π defineix un llaç, i de π a 2π defineix el mateix llaç.

8. (i) Demostreu que l'aplicació antipodal $S^1 \to S^1$, $s \mapsto -s$ té grau 1.

   (ii) Demostreu que tot homeomorfisme $S^1 \to S^1$ té grau ± 1.

9. Demostreu que una aplicació senar $S^1 \to R^2$ té grau senar.

10. Demostreu que no existeix una aplicació senar $S^2 \to S^1$. (Utilitzeu Borsuk-Ulam.)

11. Demostreu que un obert de $\mathbb{R}^2$ no és homeomorfe a cap obert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Pista: Un obert de $\mathbb{R}^n$ conté una bola E^n, la vora de la qual és S^{n-1} que conté S^2. Ara utilitzeu el teorema de Borsuk-Ulam.