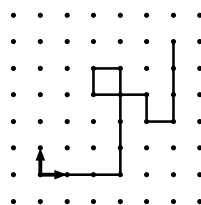


Topologia II

Llista de problemes número 5 (per al 2005-10-28)

L'exercici 1 és copiat de la llista 4.

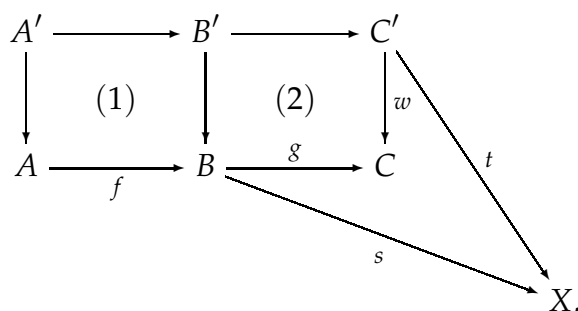
1. Demostreu que un obert de $\mathbb{R}^2$ no és homeomorfe a cap obert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.
Pista: Un obert de $\mathbb{R}^n$ conté una bola E^n , la vora de la qual és S^{n-1} que conté S^2 . Ara utilitzeu el teorema de Borsuk-Ulam.
2. Demostreu que el grup $G = \langle x, y \mid xyx^{-1} = y^2, yxy^{-1} = x^2 \rangle$ és trivial.
3. Calculeu l'abelianitzat del grup $G = \langle x, y \mid x^{10}, yxy^{-1}x^{-3} \rangle$.
4. Considereu el grup $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Demostreu que:
 - (i) G conté elements d'ordre infinit.
 - (ii) Els únics elements d'ordre finit són els de $\mathbb{Z}_2$ i $\mathbb{Z}_3$ i tots els seus conjugats.
 - (iii) El centre de G és el grup trivial.
 - (iv) El abelianitzat de G és $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.
5. Considereu el reticulat $\mathbb{Z}^2$ amb basis x, y (el grup abelià lliure generat per x i y .) Definim un *camí reticular* com una curva qui comença en $(0,0)$ i sempre ana en direcció $x, y, -x$, o $-y$, excepte als punts del reticulat on pot girar. Així:



on els dos quadrats són pushouts, demostreu que el gran rectangle és un pushout també.

7. En una categoria qualsevol, donat un diagrama commutatiu com en l'exercici anterior, però suposem que el gran rectangle (3) i (1) són pushouts. Demostreu que aleshores (2) és un pushout també.

Pista: donades fletxes s, t que fan el diagrama commutatiu:



primer utilitzeu el fet que (3) és un pushout per a obtenir una fletxa $q : C \rightarrow X$ tal que $q \circ w = t$ i $q \circ g \circ f = s \circ f$. Falta verificar si $q \circ g = s$. Per això, utilitzeu la propietat universal de (1) mostrant que tant $q \circ g$ quant s compleixin el paper de la fletxa diagonal per al pushout, i per tant deuen ser igual, per unicitat.

Uns exercicis sobre la noció de functors adjunts.

8. Demostreu que l'aplicació $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ que associa a cada grup seu conjunt subjacent, i a cada homomorfisme de grups l'aplicació subjacent, és un functor. Es diu el *functor oblit* (per que oblidat l'estructura de grup). (La notació U per a aquest functor vé de l'anglès *underlying set*.)
9. Demostreu que l'aplicació $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ que associa a cada conjunt S el grup lliure $F(S)$ és un functor. Primer heu de mostrar que donat una aplicació de conjunts $\varphi : S \rightarrow S'$ llavors l'aplicació $F(S) \rightarrow F(S')$ definida per

$$s_1^{\varepsilon_1} \dots s_k^{\varepsilon_k} \longmapsto \varphi(s_1)^{\varepsilon_1} \dots \varphi(s_k)^{\varepsilon_k}$$

és un homomorfisme de grups. Després heu de mostrar que F respecta composició d'aplicacions i aplicacions identitats.

10. Utilitzant la propietat universal dels grups lliures F , demostreu que per a tot conjunt S i per a tot grup G tenim una bijecció natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(S, U(G)) \leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(F(S), G).$$

Definició. Per dos functors

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{U} \mathcal{D}$$

diguem que F és adjunt a l'esquerre de U i U és adjunt a la dreta de F si per a tots objectes $X \in \mathcal{D}$ i $A \in \mathcal{C}$ tenim una bijecció natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), A) \xrightarrow[\sim]{\varphi_{X,A}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(A)).$$

Naturalitat significa que per a tota fletxa $\alpha : A \rightarrow A'$ en $\mathcal{D}$ tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), A) & \xrightarrow{\varphi_{X,A}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(A)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), A') & \xrightarrow{\varphi_{X,A'}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, U(A')) \end{array}$$

on las aplicacions vertical són dades per post-composició amb α (resp. $U(\alpha)$).

(Tenim un altre diagrama per a pre-composició amb una fletxa que vall també, però no en necessitem.)

11. Demostreu que la naturalitat és equivalent a això:

$$\begin{array}{ccc} F(X) \xrightarrow{f} A & & X \xrightarrow{g} U(A) \\ \searrow f' \quad \downarrow \alpha & \text{comuta si i només si} & \searrow g' \quad \downarrow U(\alpha) \\ & & A' \quad \quad \quad U(A') \end{array} \quad \text{comuta.}$$

on f correspon a g sota l'adjunció, i f' correspon a g' .

12. El producte lliure és la suma categòrica (o el coproducte categòric). La Proposició 3.3.1 diu que F preserva sumas. De fet, és un fet general que tot functor que és un adjunt a l'esquerre preserva sumas. Demostreu aquest fet!

Pista: Donat

$$\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{U} \mathcal{D}$$

amb F adjunt a l'esquerre de U . La propietat universal de la suma en $\mathcal{D}$ és

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \sqcup Y \longleftarrow Y \\ & \searrow & \downarrow \exists! \\ & & Q \end{array}$$

Volem demostrar que en $\mathcal{C}$ tenim la propietat universal per a $F(X \sqcup Y)$:

$$\begin{array}{ccc} FX & \longrightarrow & F(X \sqcup Y) \longleftarrow FY \\ & \searrow & \downarrow \exists! \\ & & T \end{array}$$

(per a tot T objecte in $\mathcal{C}$). Ara, tenir $FX \rightarrow T$ i $FY \rightarrow T$ en $\mathcal{C}$, per adjunció és equivalent a tenir $X \rightarrow UT$ i $Y \rightarrow UT$ en $\mathcal{D}$. Per la propietat de la suma (en $\mathcal{D}$), això és equivalent a tenir $X \sqcup Y \rightarrow UT$. I finalment, per adjunció novament, és tenir $F(X \sqcup Y) \rightarrow T$, com volíem. (Per a verificar que els dos triangles commuten, utilitzeu la naturalitat, com en l'exercici anterior.)