Topologia II
Llista de problemes número 6 (per al 2005-11-11)

1. En l'exemple important 4.4.6 vam mostrar que el grup fonamental del tor $T = S^1 \times S^1$ és isomorf a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ obtingut com $\pi(T) = \langle \alpha, \beta; \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$, on α i β són els generadors dels factors S^1. Per tant, els dos camins $\alpha.\beta$ i $\beta.\alpha$ deuen ser homòtops. Escreueu una homotopia explícita.

2. Més generalment, donats dos espais topològics puntejats (X, x) i (Y, y), i dos camins tancats
$$\alpha : I \to X \quad \text{baseat a } x$$
$$\beta : I \to Y \quad \text{baseat a } y.$$
Denotem també per α i β els camins induits en $X \times Y$, és a dir, els camins (α, y) i (x, β). Demostreu que $\alpha.\beta = \beta.\alpha$ en $\pi(X \times Y)$ construint una homotopia explícita.

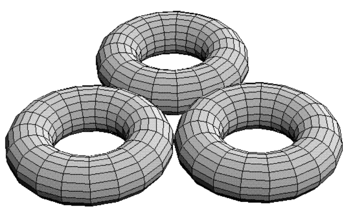
   Pista: mireu els projeccions i construïu la homotopia separadament en cada factor.

3. (i) Trobeu una aplicació entre espais topològics $f : X \to Y$ que indueixi en els grups fonamentals la projecció canònica $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

   (ii) Trobeu dos espais X i Y tals que $\pi(X)_{\text{ab}} \simeq \pi(Y)_{ab}$ però on $\pi(X)$ i $\pi(Y)$ no siguin isomorfs.

4. Sigui C el cercle $S^1 \times \{e\} \subset T = S^1 \times S^1$, i sigui Q el quocient de T obtingut col·lapsant C. Calculeu el grup fonamental de Q.

5. Siguin T_1, T_2, T_3 tres tors disjunts. Escollim a cada tor T_i un parell de punts x_i, y_i amb $x_i \neq y_i$. Calculeu el grup fonamental de l'espai que s'obté unint els tres tors mitjançant les identificacions $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_1$, tal com indica el dibuix.



6. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys dos punts.

7. Calculeu el grup fonamental de $\mathbb{R}P^2$ menys tres punts.