Topologia II
Llista de problemes número 9 (per al dimarts 2005-11-29)

1. Sigui $H = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0\}$, el mig-pla superior obert, i considereu l'aplicació
$$\begin{array}{rcl} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{array}$$
Mostreu que és una projecció recobridora. Encontreu una acció de $\mathbb{Z}$ tal que $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} = H/\mathbb{Z}$.

2. Mostreu que la funció exponencial $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \exp(z)$ és una projecció recobridora.

3. Mostreu que si $Z \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ són projeccions recobridores llavors $g \circ f$ també ho és.

4. Mostreu que si en el diagrama
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "p'"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
p i p' son ambdues projeccions recobridores, i si tots els espais són connexos, aleshores q també és una projecció recobridora.

5. Considereu un diagrama de pullback
$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & Y \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[r, "f"'] & X. \end{tikzcd}$$
Mostreu que si p és una projecció recobridora, llavors p' també ho és.

6. Demostreu que si un G-recobriment té una secció, llavors és el recobriment trivial.

7. Sigui $G' \leq G$ un subgrup. Suposem que tenim una acció propiament discontínua de G sobre un espai Y, amb projecció recobridora $p : Y \to Y/G$ (un *G-recobriment*). Llavors tenim també una acció de G' sobre Y, i per tant altra projecció recobridora $p' : Y \to Y/G'$, i una aplicació induïda $q : Y/G' \to Y/G$:
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "p"] & \\ Y/G' \arrow[rr, "q"'] & & Y/G. \end{tikzcd}$$
Demostreu que q és una projecció recobridora.

8. Considereu el grup G de homeomorfismes de $\mathbb{R}^2$ generat per
$$(x, y) \mapsto (x+1, y) \qquad \text{i} \qquad (x, y) \mapsto (-x, y+1).$$
Demostreu que l'acció de G sobre $\mathbb{R}^2$ és propiament discontínua i que el quocient és l'ampolla de Klein.

9. Considereu el grup G' de homeomorfismes de $\mathbb{R}^2$ generat per
$$(x, y) \mapsto (x+1, y) \qquad \text{i} \qquad (x, y) \mapsto (x, y+2).$$
Demostreu que l'acció de G' sobre $\mathbb{R}^2$ és propiament discontínua i que el quocient és el tor.

10. Continuant la notació dels exercicis anteriors, observeu que G' és un subgrup de G. Descreveu la projecció recobridora $X/G' \to X/G$ (cf. Exercici 7) del tor sobre l'ampolla de Klein.

11. *Elevació de aplicacions arbitràries.* Sigui $p : Y \to X$ una projecció recobridora, sigui $f : A \to X$ una aplicació contínua amb A arc-connex. Suposeu que g_1 i g_2 són dues elevacions de f per a Y i que existeix un punt $a \in A$ tal que $g_1(a) = g_2(a)$. Demostreu que $g_1 = g_2$.
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, dashed, "g_1=g_2"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$
Pista: per a verificar que g_1 i g_2 tenen la mateixa valor en un punt $z \in A$, agafeu un camí de a a z i utilitzeu la unicitat de l'elevacions de camins.

Tranformacions de cobertes. Sigui $p : Y \to X$ una projecció recobridora. Una *tranformació de cobertes* (deck transformation) és un homeomorfisme $f : Y \to Y$ compatible amb p, en el sentit que comuta el diagrama
$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
Denotem per $\mathrm{Aut}(Y/X)$ el grup de totes les transformacions de cobertes.

12. Mostreu que si $p : Y \to X$ és un recobriment trivial de n fulls, i si X és connex, llavors $\mathrm{Aut}(Y/X) \simeq \mathfrak{S}_n$ (el grup simètric en n lletres).

13. Donat un G-recobriment $Y \to Y/G = X$, demostreu que el homomorfisme de grups natural $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és injectiu.

14. Continuant la notació del exercici anterior, mostreu que si Y és connex, llavors $G \to \mathrm{Aut}(Y/X)$ és un isomorfisme.

(Pista: utilitzeu Exercici 11.)