Classes características

ABRIL 97

1 Divisores e fibrados em retas

Lembre que um divisor de Cartier é uma coleção $\{(U_i, f_i)\}$ onde os U_i cobrem X, e f_i é uma função racional (não nula) em U_i. Tem ainda a condição que em cada interseção $U_{ij} = U_i \cap U_j$, a razão f_i/f_j tem que ser uma função regular inversível.

A um divisor de Cartier D é associado um fibrado em retas $\mathcal{O}(D)$, que é o fibrado em retas que tem as f_i/f_j como funções de transição.

Um divisor de Cartier é *efetivo* quando todas as f_i são funções regulares nos seus respectivos domínios de definição. Um fibrado em retas é efetivo quando existe uma seção global. Se D é um divisor de Cartier efetivo então $\mathcal{O}(D)$ é um fibrado em retas efetivo.

1.1 Exemplo. — Em $\mathbb{P}^n$ seja $D \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ o hiperplano dado pela equação $x_0 = 0$. É um divisor de Cartier efetivo. Localmente em U_i, tem equação $x_0 x_i^{-1}$. O fibrado em retas associado $\mathcal{O}(D)$ é então o que tem as seguintes funções de transição: sobre U_{ij} é $x_0 x_i^{-1}/x_0 x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}$. É o fibrado que será chamado $\mathcal{O}(1)$. Tem uma seção global que é simplesmente x_0.

Quando X é uma *variedade* (irredutível) vale reciprocamente que se L é um fibrado em retas, então existe um divisor de Cartier D tal que $\mathcal{O}(D) = L$: a construção é a seguinte: Sejam φ_{ij} as funções de transição de L. Fixe um índice, digamos 0, e ponha $f_i = \varphi_{i0} \in \mathcal{O}^*(U_{i0}) \subset R^*(U_{i0}) = R^*(V) = R^*(U_i)$, então $f_i/f_j = \varphi_{i0} \circ \varphi_{k0}^{-1} = \varphi_{ik} \in \mathcal{O}^*(U_{ik})$. Verifica-se que os dados $\{(U_i, f_i)\}$ definem um divisor de Cartier (cujo fibrado associado é L).

Assim, a associação de um divisor de Cartier a um fibrado em retas não é única, mas temos

1.2 Proposição. — *Dado dois divisores de Cartier D e D', então os fibrados associados são isomorfos se e só se $D - D'$ é principal.*

2 Primeira classe de Chern

Definição. (provisória...) — A primeira classe de Chern é o mapa

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Div} X & \to & Z_{n-1}(X) \\ D & \mapsto & [D] \end{array}$$

onde o ciclo $[D]$ associado a um divisor $D = \{(U_i, f_i)\}$ é definido como

$$[D] = \sum \operatorname{ord}_V(f_i)[V],$$

onde as V percorrem as subvariedades (irredutíveis fechadas) de codimensão 1. A ordem é $\operatorname{ord}_V(f_i) = \ell\big(\mathcal{O}_{V,U_i}/(f_i)\big)$.

O objetivo agora é estender c_1 a para cada fibrado em retas $L \to X$ construir um operador

$$\begin{array}{rcl} c_1(L) : Z_k(X) & \longrightarrow & A_{k-1}(X) \\ [V] & \longmapsto & c_1(L) \cap [V] \end{array}$$

(O resultado não é mais um ciclo bem definido mas apenas uma classe de equivalência de ciclos...)

A construção é: dado o fibrado em retas L em X, restringe a V, e chame o resultado $L_{|V}$:

$$\begin{tikzcd} L_{|V} \arrow[r, hook] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ V \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

Agora ao fibrado $L_{|V}$ associa algum divisor de Cartier D em V. Aqui tem alguma liberdade para escolher, mas só dentro de uma classe de equivalência racional. E a este divisor é associado um ciclo. (até equivalência racional.) Quer dizer o mapa é

$$c_1(L) \cap [V] = [D_{L_{|V}}]$$

2.1 Exemplo. — Continuando o exemplo 1.1 do fibrado em retas $\mathcal{O}(1)$ em $\mathbb{P}^n$. Agora

$$c_1(\mathcal{O}(1)) \cap [\mathbb{P}^n] = D.[\mathbb{P}^n] = [D] \simeq [\mathbb{P}^{n-1}].$$

Quer dizer $c_1(\mathcal{O}(1))$ representa "interseção com hiperplano" ou a "classe de um hiperplano". Em geral,

$$\big(c_1(\mathcal{O}(1))\big)^i \cap [\mathbb{P}^n] = [\mathbb{P}^{n-i}].$$

2.2 Propriedades da primeira classe de Chern de um fibrado em retas.

① *Normalização.* Seja X esquema de dimensão pura, e seja D um divisor de Cartier em X. Então $c_1(L(D)) \cap [X] = [D]$ em $A_{n-1}(X)$.

② *Aditividade.* Sendo L_1, L_2 fibrados em retas, vale $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

③ *Naturalidade.* Seja $f : X' \to X$ um morfismo plano, e seja $z \in Z_*(X)$, então: $f^*\big(c_1(L) \cap z\big) = c_1(f^*L) \cap f^*z$.

④ *Fórmula de projeção.* Seja $p : X' \to X$ um morfismo próprio, e seja $z' \in Z_*(X')$. Então $p_*\big(c_1(p^*L) \cap z'\big) = c_1(L) \cap p_*z'$.

Veja a generalização 4.2, onde tem diagramas ilustrativos.

O item ② segue do fato que, se $L \simeq \mathcal{O}(D)$ e $M \simeq \mathcal{O}(D')$ então $L \otimes M \simeq \mathcal{O}(D + D')$, como se vê olhando para as funções de transição.

Segue deste item também que o mapa

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Pic} X \times Z_k(X) & \longrightarrow & A_{k-1}(X) \\ (L, [V]) & \longmapsto & c_1(L) \cap [V]. \end{array}$$

é bilinear. (Pela própria construção já é linear no segundo variável.)

2.3 Fato difícil. — Se $\alpha \equiv \alpha'$ são ciclos racionalmente equivalentes, então $c_1(L) \cap \alpha \equiv c_1(L) \cap \alpha'$. Isto é, o nosso mapa $c_1(L)$ fatora

$$\begin{tikzcd} Z_*(X) \arrow[d] \arrow[dr, "c_1(L)"] & \\ A_*(X) \arrow[r] & A_*(X) \end{tikzcd}$$

Para mostrar isso, a parte essencial é mostrar que se $\alpha \equiv 0$, então $c_1(L) \cap \alpha \equiv 0$.

Intimamente relacionado com este fato é a questão de comutatividade: quando V também é um divisor então vale

$$D.[V] \equiv V.[D]$$

Obtemos assim um operador $c_1(L) : A_*(X) \to A_*(X)$ que é homogêneo de grau -1, quer dizer $c_1(L) \cap A_k \subset A_{k-1}$. Então pode compor várias c_1's, e faz sentido então expressões tipo $c_1(L)^2 c_1(M) + c_1(L')$ etc. A comutatividade implica que expressões polinomiais (com coeficientes inteiros)

3 Fibrados projetivos

Definição. — Seja $p : E \to X$ um fibrado vetorial de posto $e+1$. Então define o fibrado projetivo $\mathbb{P}(E)$ associado a E como sendo o fibrado cujas fibras são as projetivizações das fibras de E. Isto é, $\mathbb{P}(E)_x := \mathbb{P}(E_x)$.

Ou equivalentemente, em termos de trivializações: Se $U_i = \operatorname{Spec} R_i$ são uma cobertura aberta de X então

$$E_{|U_i} \simeq U_i \times K^{e+1} \simeq \operatorname{Spec} R_i[T_0, \ldots, T_e].$$

O fibrado projetivo associado é então dado localmente por

$$\mathbb{P}(E)_{|U_i} := \operatorname{Proj} R[T_0, \ldots, T_e] \simeq U_i \times \mathbb{P}(K^{e+1}) \simeq U_i \times \mathbb{P}^e.$$

3.1 O fibrado tautológico. — Em espaço projetivo $\mathbb{P}^e = \mathbb{P}(K^{e+1})$, o *fibrado em retas tautológico* é

$$\mathcal{O}(-1) := \{([\mathbf{v}], \mathbf{v})\} \subset \mathbb{P}(K^{e+1}) \times K^{e+1}.$$

Quer dizer, pensando todo ponto $x \in \mathbb{P}(K^{e+1})$ como representante de uma reta em K^{e+1}, a fibra de $\mathcal{O}(-1)$ em x é justamente a reta que representa. Em termos de trivializações, sobre o aberto U_0 onde $x_0 = 1$ temos

$$\begin{array}{rcl} U_0 \times K & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(-1) \subset \mathbb{P}(K^{e+1}) \times K^{e+1} \\ \big([1 : x_1 : \ldots : x_e]\,,\, t\big) & \mapsto & \big([1 : x_1 : \ldots : x_e]\,,\, (t, tx_1, \ldots, tx_e)\big). \end{array}$$

Você calcula que as funções de transição são

$$\varphi_{ij} = \frac{x_i}{x_j} \in \mathcal{O}(-1)(U_{ij})^*,$$

logo que é o fibrado dual ao fibrado $\mathcal{O}(1)$ introduzido em Exemplo 1.1, o que justifica a notação.

Da mesma forma, qualquer fibrado projetivo $\mathbb{P}(E)$ vem munido de um fibrado em retas tautológico, denotado $\mathcal{O}_E(-1)$. Localmente, sobre $U_i \subset X$, o fibrado tautológico de $\mathbb{P}(E)_{|U_i} \simeq U_i \times \mathbb{P}^e$ é dado simplesmente estendendo $\mathcal{O}(-1)$ constantemente ao longo de U_i, ou seja, $\mathcal{O}_E(-1)$ é definido pelo diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E(-1)_{|U_i} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(-1) \arrow[d] \\ U_i \times \mathbb{P}^e \arrow[r] & \mathbb{P}^e \end{tikzcd}$$

Com boa vontade você escreve simplesmente

$$\mathcal{O}(-1) := \{([\mathbf{v}], \mathbf{v})\} \subset \mathbb{P}(E) \times_X E.$$

Definição. — O fibrado em retas dual ao tautológico, denotado $\mathcal{O}_E(1)$ é que vamos usar: A primeira classe de Chern dele,

$$c_1(\mathcal{O}_E(1)) : A_*(\mathbb{P}(E)) \to A_*(\mathbb{P}(E)),$$

terá o papel de uma "seção hiperplana", como nos Exemplos 1.1 e 2.1.

Este operador será denotado

$$\boxed{h := h_E := c_1(\mathcal{O}_E(1))}$$

4 Classes de Segre

Seja X um esquema de dimensão n, e seja $E \to X$ um fibrado vetorial de posto $e+1$. Consideramos o fibrado projetivo associado, $p : \mathbb{P}(E) \to X$. Observamos que p é um morfismo plano, o que garante que faz sentido tomar imagem inversa sob ele. Dá um mapa

$$\begin{array}{rcl} p^* : A_k(X) & \longrightarrow & A_{k+e}(\mathbb{P}(E)) \\ [V] & \longmapsto & \mathbb{P}(E)_{|V} \end{array}$$

Também, p é próprio, o que nos dá um mapa $p_* : A_r(\mathbb{P}(E)) \to A_r(X)$.

Definição. — A i-ésima *classe de Segre* de $\mathbb{P}(E)$ é o operador

$$\begin{array}{rcl} s_i(E) : A_*(X) & \longrightarrow & A_*(X) \\ z & \mapsto & p_*\big(h^{e+i} \cap p^* z\big), \end{array}$$

ou seja, é a composição

$$\begin{tikzcd} A_{k+e}(\mathbb{P}(E)) \arrow[r, "h^{e+i}"] & A_{k-i}(\mathbb{P}(E)) \arrow[d, "p_*"] \\ A_k(X) \arrow[u, "p^*"] & A_{k-i}(X) \end{tikzcd}$$

onde como sempre $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$. O índice k está presente apenas para indicar como sobe e desce a dimensão, tudo homogeneamente. Quer dizer, $s_i(E)$ é um operador homogêneo de grau -1.

Vamos explicar: seja $V \subset X$ uma variedade de dimensão k. Restringindo a V o fibrado projetivo $\mathbb{P}(E)$ obtemos uma variedade $p^*V = \mathbb{P}(E)_{|V}$ de dimensão $k+e$. Capando agora $r+i$ vezes com a primeira classe de Chern de $\mathbb{P}(E)$ obtemos o ciclo $h^{r-1-i} \cap p^*V$ de dimensão $k-i$. Isto é um elemento em $A_{k-i}(\mathbb{P}(E))$. E finalmente, tomando imagem direta, o que não muda a dimensão, ficamos com um ciclo em $A_{k-i}(X)$.

4.1 Exemplo. — Seja $X = \bullet = \operatorname{Spec} K$, e seja $E = K^{e+1}$. Então $A_*(X) = A_0(X) = \mathbb{Z}$. Logo, só $s_0(E)$ tem relevância. $s_0(E) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ é um homomorfismo de grupos, logo basta saber quem é $s_0(E) \cap 1$, onde $1 = 1\bullet$. Primeiro, a imagem inversa de $[\bullet]$ é $p^*[\bullet] = \mathbb{P}^e$. Em seguida, capar e vezes com $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$ dá $h^e(\mathbb{P}^e) = [\bullet] \subset \mathbb{P}^e$ e a imagem direta deste ciclo evidentemente é $[\bullet]$. Ou seja

$$s_0(E) \cap [\bullet] = [\bullet],$$

ou seja, $s_0(E)$ é o operador identidade em $\mathbb{Z}$.

4.2 Propriedades de classes de Segre.

① $s_0 = \mathrm{Id}$
Para $i < 0$ e $i > n = \dim X$, temos $s_i = 0$, e para $1 \leq i \leq n$ temos que s_i é nilpotente.

② *Naturalidade.* Se $g : X' \to X$ é um morfismo plano, então para todo $z \in A_*(X)$

$$g^*\big(s_i(E) \cap z\big) = s_i(g^*E) \cap g^*z.$$

Ou seja,

$$\begin{tikzcd} A_*(X') \arrow[r, "s_i(g^*E)"] & A_*(X') \\ A_*(X) \arrow[u, "g^*"] \arrow[r, "s_i(E)"'] & A_*(X) \arrow[u, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

③ *Fórmula de projeção.* Se $g : X' \to X$ é um morfismo próprio, então para todo $z' \in A_*(X')$

$$g_*\big(s_i(g^*E) \cap z'\big) = s_i(E) \cap g_*z'.$$

Ou seja,

$$\begin{tikzcd} A_*(X') \arrow[r, "s_i(g^*E)"] \arrow[d, "g_*"'] & A_*(X') \arrow[d, "g_*"] \\ A_*(X) \arrow[r, "s_i(E)"'] & A_*(X) \end{tikzcd}$$

④ *Comutatividade.* Se E e F são dois fibrados vetoriais, então

$$s_i(E)s_j(F) = s_j(F)s_i(E).$$

Ou seja,

$$\begin{tikzcd} A_k(X) \arrow[r, "s_i(E)"] \arrow[d, "s_j(F)"'] & A_{k-i}(X) \arrow[d, "s_j(F)"] \\ A_{k-j}(X) \arrow[r, "s_i(E)"'] & A_{k-i-j}(X) \end{tikzcd}$$

onde os índices foram colocados só para mostrar em que ordem a dimensão cai, tudo homogeneamente.

⑤ *Normalização.* Para todo fibrado em retas $L \to X$ temos

$$s_1(L) = -c_1(L).$$

Demonstração de ⑤. — Seja $V \subset X$ uma variedade, calculemos $s_1(L) \cap [V]$. Primeiro calculamos p^*V; é apenas $\mathbb{P}(L)$ restrito a V, denotamo-lo ainda por $\mathbb{P}(L) \to V$. Sendo L de posto 1, $\mathbb{P}(L)$ é isomorfo a V; é um fibrado de pontos! Temos por definição do fibrado tautológico um diagrama cartesiano

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_L(-1) \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[d] \\ \mathbb{P}(L) \arrow[r, "\sim", "p"'] & V \end{tikzcd}$$

donde segue que $\mathcal{O}_L(-1) \simeq p^*L$. Ou dualmente, $\mathcal{O}_L(1) \simeq p^*L^\vee$. Agora por definição

$$\begin{aligned} s_1(L) \cap [V] &= p_*\big(c_1(\mathcal{O}_L(1)) \cap p^*[V]\big) \\ &= p_*\big(c_1(p^*L^\vee) \cap p^*[V]\big) \\ &= c_1(L^\vee) \cap p_*p^*[V] \\ &= -c_1(L) \cap [V] \end{aligned}$$

(conforme a fórmula de projeção, e o fato de que $p_*p^*[V] = [V]$ porque p é um isomorfismo. □

Definição. — A classe total $s(E) : A_*(X) \to A_*(X)$ é a soma $s(E) := \sum s_i(E)$.

5 Classes de Chern

Sendo os s_i nilpotentes para $1 \le i \le n$ segue que a classe total

$$s = 1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_n$$

é um operador inversível.

Definição. — O operador inverso $c(E) := s(E)^{-1}$ à classe total de Segre, é o operador *classe total de Chern.* Decompondo $c(E)$ em seus componentes homogêneos, $c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \ldots + c_n(E)$, definem-se as classes de Chern. Quer dizer, a i-ésima classe de Chern é um operador $A_k(X) \to A_{k-1}(X)$.

Da igualdade $s(E)c(E) = 1$ segue que para cada $i \geq 1$ temos

$$\sum_k s_{i-k}(E)c_k(E) = 0. \tag{5.0.1}$$

Estas identidades determinam as classes de Chern. Por exemplo,

$$\begin{aligned} c_0 &= \mathrm{Id} \\ c_1 &= -s_1 \\ c_2 &= s_1^2 - s_2 \end{aligned}$$

etc. Em geral a relação é dada por

$$c_i = (-1)^i \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_i \\ 1 & s_1 & \ldots & s_{i-1} \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & s_1 \end{vmatrix}$$

como se verifica fazendo inversão pela série geométrica.

5.1 Observação. — Já tínhamos outra definição de c_1, a primeira classe, em cima de um fibrado em retas. A naturalidade das classes de Segre garante que a nova definição coincide com a primeira neste caso.

5.2 Proposição. — *As classe de Chern gozam das mesmas propriedades das classes de Segre, listadas em 4.2.*

De fato, essas quatro propriedades caracterizam as classes de Chern.

6 O princípio da cisão

6.1 Lema. — *Seja $E \to X$ um fibrado em retas de posto r, então existe um morfismo plano $f : X' \to X$ tal que $f^* : A_*(X) \to A_*(X')$ é injetivo, e f^*E admite uma filtração $f^*E = E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_{r+1} = 0$ de fibrados sobre X' tal que todos os quocientes E_i/E_{i+1} são fibrados em retas.*

Demonstração. — Indução sobre o posto. Se E é de posto 1, não há nada par provar. Seja $E \to X$ um fibrado de posto r. Ponha $X^0 := \mathbb{P}(E) \xrightarrow{p} X$. Então certamente $p^* : A_*(X) \to A_*(\mathbb{P}(E))$ é injetivo: Com efeito, seja $z \in A_*(X)$, e suponha $p^*z = 0$ em $A_*(\mathbb{P}(E))$. Então

$$z = s_0(E) \cap z = p_*\big(h^{r-1} \cap p^*z\big) = 0.$$

Agora dentro de p^*E temos o fibrado tautológico

$$\mathcal{O}_E(-1) \hookrightarrow p^*E \twoheadrightarrow \overline{E}$$

onde $\overline{E}$ é o co-núcleo, que é um fibrado de posto $r-1$. Por indução, existe agora um morfismo plano $q : X' \to X^0$ tal que $q^* : A_*(X^0) \to A_*(X')$ é injetivo e $q^*\overline{E}$ admite uma filtração.

$$\begin{array}{ccccc}
q^*\mathcal{O}_E(-1) & \hookrightarrow & q^*p^*E & \xrightarrow[\beta]{} \!\!\!\!\to & q^*\overline{E} \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \beta^{-1}(\overline{E}_2) & \twoheadrightarrow & \overline{E}_2 \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & \operatorname{Ker}\beta & \twoheadrightarrow & 0 \\
 & & \parallel & & \\
 & & q^*\mathcal{O}_E(-1) & &
\end{array}$$

o que constroi justamente uma filtração de p^*E. (O último quociente é o fibrado em retas $\mathcal{O}_E(-1)$.) $\square$

6.2 Observação. — A construção mostra que dada uma coleção finita de fibrados vetoriais $E_1, \ldots, E_k$ é possível fazer mudança de base para filtrar todos os fibrados simultaneamente.

6.3 Funções simétricas. — Seja X um símbolo livre sobre o anel $k[t_1, \ldots, t_n]$, e considere o polinômio $\prod_{i=1}^n (X + t_i)$. Expandindo e pondo X em evidência, podemos escrever o polinômio como

$$= \sum_{k=0}^n \sigma_k(t_1, \ldots, t_n) X^k,$$

o que define as *funções simétricas elementares* σ_k em $t_1, \ldots, t_n$. Em particular, notamos que

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1 \\
\sigma_1 &= t_1 + t_2 + \cdots + t_n \\
\sigma_2 &= \sum_{i<j} t_i t_j \\
&\vdots \\
\sigma_n &= t_1 t_2 \cdots t_n.
\end{aligned}$$

Em geral, σ_k é uma soma de $\binom{n}{k}$ termos de grau k.

6.4 Lema. — *Seja X uma variedade (ou esquema?) e seja E um fibrado de posto r que admite uma filtração $E = E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_{r+1} = 0$, onde os quocientes $L_i := E_i/E_{i+1}$ são fibrados em retas.*

Seja σ_i a i-ésima função simétrica elementar em $c_1(L_1), \ldots, c_1(L_r)$, isto é

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= c_1(L_1) + \cdots + c_1(L_r) \\
&\vdots \\
\sigma_r &= c_1(L_1) c_1(L_2) \cdots c_1(L_r)
\end{aligned}$$

Então

① *Se E admite uma seção $s : \mathcal{O} \to E$ sem zeros i.e. $Z(s) = \emptyset$, então $\sigma_r = 0$.*
② *A classe total de Chern é $c(E) = \prod \big(1 + c_1(L_i)\big)$. Ou equivalentemente, para $i = 1, \dots, r$ temos $c_i(E) = \sigma_i$, e para $i > r$ temos $c_i(E) = 0$.*

Demonstração. — Quanto a ①, indução sobre o posto. Se E tem posto 1, e $s : \mathcal{O} \to E$ é uma seção sem zeros, então o divisor de Cartier induzido por s é principal logo $c_1(E) = 0$.

Seja agora $r \geq 2$. A situação é

$$\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & L_1 \\
& \mathcal{O} \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "s'"'] &
\end{tikzcd}$$

Se s' é a seção nula, então s fatora através de E_2, e então indução vai completar a demonstração. Supomos que s' não é a seção nula. Ponha então $Z := Z(s')$, o esquema de zeros de s'. É um divisor de Cartier efetivo. Restringindo tudo a Z obtemos

$$\begin{tikzcd}
E_{2|Z} \arrow[r, hook] & E_{|Z} \arrow[r, two heads] & L_{1|Z} \\
& \mathcal{O}_{|Z} \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, "\overline{s}"] \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

onde $s' \equiv 0$, e se induz uma seção $\alpha : \mathcal{O} \to E_{2|Z}$, que herda a propriedade de s de não se anular em lugar nenhum. Agora indução.

Detalhes. Pela hipótese de indução aplicada à seção $\alpha : \mathcal{O} \to E_{2|Z}$, temos

$$\left(\prod_{i=2}^{r} c_1(L_{i|Z}) \right) \cap [V] = 0 \tag{6.4.1}$$

onde $[V]$ é um ciclo em Z. Vamos calcular agora em X inteiro:

$$\left(\prod_{i=1}^{r} c_1(L_i) \right) \cap [W] = \left(\prod_{i=2}^{r} c_1(L_i) \right) \cap \big(c_1(L_1) \cap [W] \big),$$

mas $c_1(L_1) \cap [W] = [Z]$ (por naturalidade, e pela construção de Z). Logo,

$$= \left(\prod_{i=2}^{r} c_1(L_i) \right) \cap [Z].$$

Seja $\iota : Z \hookrightarrow X$ a inclusão. A fórmula de projeção nos dá agora

$$= \iota_* \left(\prod_{i=2}^{r} c_1(\iota^* L_i) \right) \cap [Z]$$

e agora a hipótese de indução (6.4.1) mostra que é zero.

Quanto a ②, dentro de p^*E temos o fibrado tautológico $\mathcal{O}_E(-1) \hookrightarrow p^*E$, que vamos interpretar como uma seção $s : \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_E(1) \otimes p^*E$. Esta seção não se anula em lugar nenhum (porque em cada fibra é injetiva), logo estamos em condições de aplicar item ①.

Tensorize por $\mathcal{O}_E(1)$ a filtração $E = E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_r$. Isto dá uma filtração de $\mathcal{O}_E(1) \otimes E$ com quocientes $\mathcal{O}_E(1) \otimes p^*E_i / (\mathcal{O}_E(1) \otimes p^*E_{i+1}) \simeq \mathcal{O}_E(1) \otimes p^*L_i$. Agora

$$c_1\big(\mathcal{O}_E(1) \otimes p^*L_i\big) = h + c_1(p^*L_i),$$

onde $h := c_1(\mathcal{O}_E(1))$. As classes $c_1(p^*L_i)$ são chamados as *raízes de Chern*. Agora pelo item ① temos

$$0 = \prod_{i=1}^{r} \big(h + c_1(p^*L_i)\big) = \sum_{k=0}^{r} h^{r-k}\sigma'_k, \tag{6.4.2}$$

onde a última igualdade é apenas escrever em termos de funções simétricas: $\sigma'_k := \sigma_k(c_1(p^*L_1), \ldots, c_1(p^*L_r))$.

Multiplicando por h^{i-1} e tomando imagem direta obtemos,

$$0 = p_* \sum_{k=0}^{\infty} h^{r-k+i-1}\sigma'_k.$$

Aqui k foi permitido a correr além de r, com a convenção de que $\sigma'_k = 0$ para $k > r$.

Agora vamos calcular, para qualquer $i \geq 1$, e para qualquer $z \in A_*(X)$, a soma

$$\left(\sum_{k=0}^{i} s_{i-k}(E)\sigma_k\right) \cap z.$$

Se der zero, mostra que $\sigma_k = c_k(E)$, conforme 5.0.1. Vejamos: Primeiro, com a convenção de que as classes de Segre negativas são nulas, podemos continuar a somatório além de i:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{i} s_{i-k}(E)\sigma_k\right) \cap z &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_{i-k}(E)\sigma_k\right) \cap z \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \big(s_{i-k}(E) \cap (\sigma_k \cap z)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_*\big(h^{r-1+i-k} \cap p^*(\sigma_k \cap z)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_*\big(h^{r-1+i-k} \cap (\sigma'_k \cap p^*z)\big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p_*\big(h^{r-1+i-k}\sigma'_k\big) \cap p^*z
\end{aligned}$$

que é justamente o que antes achamos igual a zero. □

6.5 Observação. — Sabendo agora que $c_i(E) = \sigma_i$, a fórmula 6.4.2 da demonstração fica

$$\boxed{h^r + c_1(p^*E)h^{r-1} + \cdots + c_{r-1}(p^*E)h + c_r(p^*E) = 0}$$

Originalmente, quando Grothendieck introduziu as classes de Chern em geometria algébrica, esta relação foi a definição das classes.

6.6 Observação. — Desta fórmula segue que o anel de Chow de um fibrado projetivo $\mathbb{P}(E)$ pode ser calculado a partir do da base como

$$A_*\big(\mathbb{P}(E)\big) = \big(A_*(X)\big)[T]/(T^r + c_1T^{r-1} + \cdots + c_r).$$

6.7 Proposição. *(Fórmula de Whitney.) — As classes de Chern são multiplicativas em relação a seqüências exatas: Se* $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ *é uma seqüência exata de fibrados vetoriais sobre* X*, então*

$$c(E) = c(E')c(E'').$$

Demonstração. — Pelo lema 6.1, existe um morfismo $f : X' \to X$ tal que $f^* : A_*(X) \to A_*(X')$ é injetivo e f^*E' e f^*E'' admitem filtrações com quocientes de posto 1. Agora as filtrações de f^*E' e f^*E'' se combinam para dar uma filtração de f^*E cujos quocientes são as mesmas. Ou seja, as raízes de f^*E são as raízes de f^*E' mais as raízes de f^*E''. Pela fórmula 6.4.② concluimos que a proposição vale para o pull-back: $c(f^*E) = c(f^*E')c(f^*E'')$. Mas sendo f^* injetivo, a fórmula vale para os fibrados originais também. □

6.8 Lema. — *Seja E um fibrado vetorial de posto r, e seja L um fibrado em retas. Então*

$$\begin{aligned} c_1(E \otimes L) &= c_1(E) + rc_1(L) \\ c_r(E \otimes L) &= \sum_{i=0}^{r} c_{r-i}(E)c_1(L)^i \end{aligned}$$

Existem também fórmulas explícitas para as demais classes de Chern de $E \otimes L$, mas envolvem um monte de coeficientes binomiais.

Demonstração. — Pelo princípio da cisão basta verificar as fórmulas no caso onde $E = \bigoplus_{i=1}^r L_i$. Então, pela fórmula de Whitney (6.7) temos $c(E \otimes L) = c\big(\bigoplus(L_i \otimes L)\big) = \prod c(L_i \otimes L)$ e pela aditividade da primeira classe de Chern de fibrados em retas (2.2.②) vem $= \prod(1 + \lambda_i + \lambda)$, onde $\lambda_i := c_1(L_i)$ e $\lambda := c_1(L)$. Expandindo esta expressão dá

$$\begin{aligned} c(E \otimes L) &= (1+\lambda)^r + \sigma_1(\lambda_i)(1+\lambda)^{r-1} + \cdots + \sigma_r(\lambda_i)1 \\ &= (1+\lambda)^r + c_1(E)(1+\lambda)^{r-1} + \cdots + c_r(E) \end{aligned}$$

onde $\sigma_j(\lambda_i)$ denota a j-ésima função simétrica nos λ_i; pelo lema 6.4, isto é justamente $c_j(E)$. Agora, os termos de grau 1 só aparecem no início, e são $r\lambda + c_1(E)$. Os termos de grau r são

$$\lambda^r + c_1(E)\lambda^{r-1} + \ldots c_{r-1}(E)\lambda + c_r(E)$$

□

Como aplicação dos resultados, vamos calcular as classes de Chern de $\mathbb{P}^n$.

6.9 Exemplo. *Classes de Chern de $\mathbb{P}^n$.* — Quando se fala de classes de Chern de um esquema é subentendido que se trata do fibrado tangente. Quer dizer, $c(\mathbb{P}^n) := c(T\mathbb{P}^n)$. O fibrado tangente é (mais ou menos) o feixe de derivações. Considere o mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} &\longrightarrow T\mathbb{P}^n \\ F := (f_0, \ldots, f_n) &\longmapsto D_F := \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Observe aqui que os f_i's são frações a_i/b_i onde a_i e b_i são homogêneos e a_i tem grau um a mais. A imagem D_F é uma derivação $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ pelo seguinte:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g/h) = \frac{h\frac{\partial}{\partial x_i}g - g\frac{\partial}{\partial x_i}h}{h^2}$$

que é um elemento em $\mathcal{O}(-1)$, mas multiplicando por f_i como está sendo feito na definição remedia isto. É uma verificação trivial que satisfaz as regras de derivação.

Fazendo as contas nas cartas afins, você descobre que o mapa de fato é sobre: todas as derivações aparecem desta construção.

O núcleo é

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \hookrightarrow & \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \\ 1 & \mapsto & (x_0, \dots, x_n) \end{array}$$

De fato, a imagem deste elemento em $T\mathbb{P}^n$ é $\sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$, conforme o lema de Euler. Isto mostra que 1 pertence ao núcleo. De fato é o núcleo todo. Temos agora

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus n+1} \to T\mathbb{P}^n \to 0$$

donde segue que

$$\begin{array}{rcl} c(T\mathbb{P}^n) & = & c\left(\dfrac{\mathcal{O}(1)^{\oplus n+1}}{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}\right) \\ & = & c\big(\mathcal{O}(1)^{\oplus n+1}\big) \\ & = & c\big(\mathcal{O}(1)\big)^{n+1} \\ & = & (1+h)^{n+1} \\ & = & 1 + (n+1)h + \dbinom{n+1}{2}h^2 + \dots \end{array}$$

onde $h = c_1(\mathcal{O}(1))$ é a classe de um hiperplano. Segue que $c_1(\mathbb{P}^n) = (n+1)h$.

A seguinte generalização de 6.4.① é uma das ferramentas mais importantes para cálculos com classes de Chern. Generaliza também o teorema de Bézout.

6.10 Proposição. — *Seja E um fibrado vetorial de posto r, e seja $s : \mathcal{O} \to E$ uma seção regular, i.e. localmente $s = (f_1, \dots, f_r)$, onde as $f_i \in \mathcal{O}(U)$ formam uma seqüência regular. Ponha $Z := Z(s)$, o esquema de zeros de s. Então*

$$c_r(E) \cap [X] = [Z].$$

Demonstração. — Indução sobre r. O caso $r = 1$ é praticamente a definição da primeira classe de Chern. Para o caso geral, basta provar que vale em $X' := \mathbb{P}(E)$, conforme o princípio da cisão. Seja $p\, X' \to X$ a projeção. Aqui em X' temos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E(-1) \arrow[r, hook] & p^*E \arrow[r, two heads] & Q \\ & \mathcal{O}_E \arrow[u, "p^*s"] \arrow[ur, "s'"'] & \end{tikzcd}$$

onde Q é apenas o co-núcleo, portanto um fibrado de posto $r-1$. Localmente, se A é o anel local de um aberto de X, então X' é dado por $A[T_1,\dots,T_r]$. Então se s localmente é uma seqüência regular de funções em A, então é claro que p^*s, que é apenas a imagem de s, continua sendo regular em $A[T_1,\dots,T_r]$. Pense em p^*s localmente como r funções regulares $X \to k$, pense em E como localmente $E \simeq \mathcal{O}_E(-1) \oplus Q$. Então a primeira função de coordenada de p^*s vai para $\mathcal{O}_E(-1)$ (e será chamada s^1); as demais vão para Q. A seção induzida s' é então essas $r-1$ demais funções. Segue que s' também é uma seção regular.

Por indução agora, $c_{r-1}(Q) \cap [X'] = Z(s')$. Agora restrinja tudo a $Z(s')$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E(-1)_{|Z} \arrow[r, hook] & p^*E_{|Z} \arrow[r, two heads] & Q_{|Z} \\ & \mathcal{O}_{E|Z} \arrow[ul, "s^1"] \arrow[u] \arrow[ur, "s' \equiv 0"'] & \end{tikzcd}$$

Observe agora que $[Z(s^1)] = [Z(p^*s)]$. Por outro lado, por indução,

$$\begin{aligned} [Z(s^1)] &= c_1(\mathcal{O}_E(-1)) \cap [Z(s')] \\ &= c_1(\mathcal{O}_E(-1)) \cap c_{r-1}(Q) \cap [X'] \\ &= c_1(p^*E) \cap [X'] \end{aligned}$$

onde a última igualdade é a fórmula de Whitney.

Valendo agora o resultado em $A_*(\mathbb{P}(E))$, vale em $A_*(X)$ também pelo lema 6.1. □

6.11 Exemplo. — Sejam $H_1,\dots,H_r$ hipersuperfícies em $\mathbb{P}^n$ (tais que as equações formam uma seqüência regular...). Seja d_i o grau de H_i, e seja $Z := H_1 \cap \cdots \cap H_r$. Então

$$\deg Z = d_1 \cdots d_r.$$

Com efeito, considere H_i seção de $\mathcal{O}(d_i)$, e ponha $E := \bigoplus \mathcal{O}(d_i)$. Então $s := (H_1,\dots,H_r)$ é seção de E como na Proposição. Agora, pelo princípio da cisão, $c_r(E) = \prod d_i h = \big(\prod d_i\big) h^r$.

6.12 Corolário. — *Seja $E \hookrightarrow F \twoheadrightarrow Q$ uma seqüência exata de fibrados vetoriais sobre X, e seja r o posto de Q. Então,*

$$[\mathbb{P}(E)] = c_r\big(\mathcal{O}_F(1) \otimes p^*Q\big) \cap [\mathbb{P}(F)] \qquad \text{em } A_*(\mathbb{P}(F)),$$

onde $p : \mathbb{P}(F) \to X$ é a projeção estrutural.

Demonstração. — O lance está em exibir $\mathbb{P}(E)$ como zeros de uma seção regular: Considere o diagrama de fibrados sobre $\mathbb{P}(F)$:

$$\begin{tikzcd} p^*E \arrow[r, hook] & p^*F \arrow[r, two heads] & p^*Q \\ & \mathcal{O}_F(-1) \arrow[u] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

A seção vertical é regular pelo mesmo argumento da demonstração, e segue daí também que s é regular. Os zeros de s é o lugar dos pontos $x \in \mathbb{P}(F)$ tais que $\mathcal{O}_F(-1) \to p^*F$

fatora através de p^*E. Vejamos que isto acontece exatamente em $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Com efeito, $p^*F = \mathbb{P}(F) \times F$, e aqui dentro, $\mathcal{O}_F(-1)$ consiste dos pares "incidentes", quer dizer, em cima de um ponto $x \in \mathbb{P}(F)$ é a reta representado por x. Agora se x está em $\mathbb{P}(E)$, então a reta deve estar em E, ou seja: $\mathcal{O}_F(-1)$ está em $\mathbb{P}(F) \times E = p^*E$. E reciprocamente, se (em alguma fibra) $\mathcal{O}_F(-1)$ já está em $\mathbb{P}(F) \times E$ então a reta está em E, e pela definição de $\mathcal{O}_F(-1)$, o ponto representando a reta deve estar em $\mathbb{P}(E)$. Portanto, $Z(s) = \mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Agora interpretando a seção como $s : \mathcal{O}_F \to \mathcal{O}_F(1) \otimes p^*Q$ temos pela proposição

$$c_r\big(\mathcal{O}_F(1) \otimes p^*Q\big) \cap [\mathbb{P}(F)] = [\mathbb{P}(E)] \qquad \text{em } A_*(\mathbb{P}(F)),$$

como prometido. $\square$

Classes características: Exemplos

MAIO 97

7 Feixe de partes principais

Referência para esta seção: EGA 4.

7.1 Observação. — O feixe de partes principais é também chamado o feixe de jatos.

Definição. — Seja X um esquema e seja E um feixe em X. Considere o produto $X \times X$ com projeções p_1 e p_2, e seja I o ideal da diagonal $\Delta \subset X \times X$. Então I^m é o ideal da diagonal gorda $m\Delta$ dos vizinhos infinitesimais de ordem $m-1$. Agora por definição, o *feixe de partes principais* de E é

$$\mathcal{P}_X^{m-1}(E) := p_{1*}(p_2^* E \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}).$$

Aqui o produto tensorial é sobre $X \times X$.

O feixe de partes principais protagoniza uma seqüência exata curta, que passamos a descrever. O ponto de partida é a seqüência exata (de feixes sobre $X \times X$)

$$I^m/I^{m+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{(m+1)\Delta} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{m\Delta},$$

que tensorizamos por $p_2^* E$ para obter

$$p_2^* E \otimes I^m/I^{m+1} \hookrightarrow p_2^* E \otimes \mathcal{O}_{(m+1)\Delta} \twoheadrightarrow p_2^* E \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}.$$

É melhor supor aqui que E seja localmente livre, para garantir que a seqüência continua exata. Tomando imagem direta sob p_1 obtemos uma longa seqüência de feixes sobre X

$$\begin{aligned} 0 \to p_{1*}(p_2^* E \otimes I^m/I^{m+1}) \to \mathcal{P}_X^m(E) \to \mathcal{P}_X^{m-1}(E) \to \\ \to R^1 p_{1*}(p_2^* E \otimes I^m/I^{m+1}) \to \end{aligned}$$

O primeiro termo se calcula aplicando a fórmula de projeção, observando que I^m/I^{m+1} é suportado na diagonal (é um $\mathcal{O}_\Delta$-módulo) — portanto $p_1 = p_2$ aqui — e em seguida observar que $I^m/I^{m+1} \simeq \operatorname{Sym}^m(I/I^2)$:

$$p_{1*}(p_2^* E \otimes I^m/I^{m+1}) \simeq E \otimes p_{1*}(I^m/I^{m+1}) = E \otimes p_{1*}(\operatorname{Sym}^m(I/I^2)) \simeq E \otimes \operatorname{Sym}^m \Omega_X.$$

Ademais, sendo $p_1 : \Delta \to X$ um isomorfismo, não há imagens diretas superiores. A seqüência fica então

$$\boxed{0 \to E \otimes \operatorname{Sym}^m \Omega_X \to \mathcal{P}_X^m(E) \to \mathcal{P}_X^{m-1}(E) \to 0}$$

Observe que $\mathcal{P}_X^0(E) \simeq E$. Com efeito, sendo $p_2^* E \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}$ suportado na diagonal, podemos aplicar a fórmula de projeção para achar

$$\mathcal{P}_X^0(E) = p_{1*}(p_2^* E \otimes \mathcal{O}_\Delta) \simeq E \otimes p_{1*}\mathcal{O}_\Delta \simeq E$$

Para $m = 1$ a seqüência fica então

$$0 \to E \otimes \Omega_X \to \mathcal{P}^1_X(E) \to E \to 0.$$

Em seguida descrevemos o "homomorfismo estrutural" de $\mathcal{P}^{m-1}_X(E)$. Da identidade $E \to E$ é induzido $p_2^* E \to p_2^* E \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}$ e tomando imagem direta obtém-se $p_{1*}p_2^*E \to \mathcal{P}^{m-1}_X(E)$. Agora seja $f : X \to \bullet$ o morfismo estrutural de X, então o produto é definido por

$$\begin{tikzcd} & X \times X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & \bullet & \end{tikzcd} \tag{7.1.1}$$

Nesta situação vale $p_{1*}p_2^*E \simeq f^*f_*E$ — é um fato deste tipo de quadrados cartesianos (pull-back plano? ou o que é que faz funcionar?), que imagens direta e inversa comutam assim. Aqui $f_*E = H^0(X, E)$, e $f^*f_*E = f^*H^0(X, E) = H^0(X, E) \otimes_k \mathcal{O}_X$, o feixe trivial de seções globais, denotado $\mathcal{H}^0(E)$. (Se $H^0(X, E)$ é de dimensão d, então o feixe é isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus d}$. Visto como fibrado vetorial é simplesmente $X \times H^0(X, E)$.)

O homomorfismo "estrutural" é então $\mathcal{H}^0(E) \to \mathcal{P}^{m-1}_X(E)$. Por algum motivo, este mapa é sobrejetivo, isto é: sobrejetivo como morfismo de *feixes*, não em termos de seções sobre abertos...

O significado deste mapa é que, localmente, em cada fibra, consiste em tomar o m-jato de uma seção. Ou seja, se $s \in H^0(E)_P$ é uma seção, então a imagem é o desenvolvimento de Taylor em P até ordem m (ou talvez $m - 1$).

Nas aplicações que vêm a seguir, o fibrado será um fibrado em retas L, e tudo que precisa saber é resumido no diagrama

$$\begin{tikzcd} L \otimes \Omega_X^{\otimes m} \arrow[r, hook] & \mathcal{P}^m_X(L) \arrow[r, two heads] & \mathcal{P}^{m+1}_X(L) \\ & \mathcal{H}^0(L) \arrow[u, two heads] \arrow[ur, two heads] & \end{tikzcd}$$

8 Cônicas em $\mathbb{P}^2$

Seja $X = \mathbb{P}^2$ o plano projetivo, e seja F o espaço vetorial de formas de grau 2; é gerado por $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$, logo tem dimensão 6. Sua projetivitação $\mathbb{P}(F)$ é o espaço parametrizando cônicas em $\mathbb{P}^2$.

Vamos agora considerar F como o *fibrado vetorial* trivial de posto 6, e $\mathbb{P}(F)$ passa a ser o fibrado projetivo (trivial também). Ou seja, $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 = \{(p, \kappa) \mid p \in \mathbb{P}^2, \kappa \in \mathbb{P}^5\}$. Aqui dentro vamos estudar o subfibrado $\mathbb{P}(E)$ formado pelos pares (p, κ) tais que p é um ponto singular de κ. Ou seja

$$E = \{(p, \kappa) \mid \nabla\kappa(p) = 0\}.$$

Para $p \in \mathbb{P}^2$ fixo, esta condição é linear em F, portanto realmente define um subfibrado em F. Vamos calcular a classe de $[\mathbb{P}(E)]$ em $\mathbb{P}(F)$. (E notamente sua imagem direta sobre a projeção para $\mathbb{P}^5$.)

8.1 Observação. — Entre E e F temos um outro fibrado importante: O fibrado C formado pelos pares (p, κ) tais que $p \in \kappa$. (É um fibrado de posto $6 - 1$, porque passar por um ponto é uma condição linear em $\mathbb{P}^5$.?????)

8.2 Construção mais formal de F, para fazer aparecer derivadas parciais. — Seja V o espaço vetorial subjacente a $\mathbb{P}^2$, de modo que $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$. Então considere o fibrado trivial de posto 3 dado por V, e o fibrado tautológico aqui dentro:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \hookrightarrow V \twoheadrightarrow Q \tag{8.2.1}$$

onde Q é nosso nome para o quociente. Na verdade o que rola aqui é o seguinte: Seja $f : \mathbb{P}(V) \to \bullet := \operatorname{Spec} k$ o morfismo estrutural de $\mathbb{P}(V)$. Então na seqüência, na verdade se trata de f^*V:

$$\begin{tikzcd} f^*V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ \mathbb{P}(V) \arrow[r, "f"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Mas para não sobrecarregar a notação vamos sempre suprimir o símbolo de pullback ao longo de morfismos estruturais para $\bullet$.

8.3 Observação. — Tensorizando a seqüência (8.2.1) por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ obtemos a seqüência de Euler (cf. Exemplo 6.9):

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \twoheadrightarrow Q \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = T\mathbb{P}^2$$

Aqui, em notação de feixes, $V = \mathcal{O}^{\oplus 3}$, portanto $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = \mathcal{O}(1)^{\oplus 3}$.

Agora dualize a seqüência (8.2.1):

$$Q^* \hookrightarrow V^* \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$$

Ambos V^* e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ têm a ver com formas lineares em V (ou em $\mathbb{P}(V)$). De fato, V^* é o espaço de seções globais de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Com efeito, as seções globais de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ é $f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ que é um feixe sobre $\bullet$, ou seja um espaço vetorial, e é gerado pelas três formas x, y, z exatamente como V^*. Logo $f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = V^*$. Pulling back para $\mathbb{P}(V)$ ficamos com a identidade $f^*f_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) = f^*V^* = V^*$ (cf. a notação abusiva).

Tome agora produto simétrico para ficar com

$$F := S_2(V^*) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$$

que é uma seqüência de fibrados sobre $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$. O fibrado F tem posto 6, e ainda é o feixe de seções globais de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$.

Agora considere o diagrama de partes principais de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^2} \arrow[r, hook] & \mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) \\
& F = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \arrow[u, two heads] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Aqui $\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ é de posto 3.

Seja (p, κ) um elemento em F. Dizer que vai para zero em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, é dizer que $\kappa(p) = 0$. Ou seja, o núcleo do mapa diagonal do diagrama é exatamente o fibrado C da Observação 8.1. Dizer que (p, κ) vai para zero já em $\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ é dizer que não apenas a forma κ se anula em p, mas também a derivada de κ se anula em p. Ou seja, $\nabla\kappa(p) = 0$. Isto é dizer que o núcleo de $F \twoheadrightarrow \mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ é exatamente E: num ponto $p \in \mathbb{P}^2$, o núcleo é formado por todas as cônicas cujas primeiras derivadas se anulam em p.

Agora podemos calcular a classe de $\mathbb{P}(E)$. Pelo corolário 6.12 temos

$$[\mathbb{P}(E)] = c_3\big(\mathcal{O}_F(1) \otimes_{\mathcal{O}_F} p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)\big) \cap [\mathbb{P}(F)].$$

Devemos calcular $c_3\big(\mathcal{O}_F(1) \otimes_{\mathcal{O}_F} p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)\big)$: Pelo lema 6.8,

$$\begin{aligned}
c_3\big(\mathcal{O}_F(1) \otimes_{\mathcal{O}_F} p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)\big) \quad = \quad & c_3\big(p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))\big) \\
& + c_2\big(p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))\big)H \\
& + c_1\big(p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))\big)H^2 \\
& + H^3
\end{aligned}$$

onde $H := c_1(\mathcal{O}_F(1))$. Agora as classes de Chern de $p^*\mathcal{P}^1_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ podem ser calculadas pela seqüência exata: vai ser uma expressão em $h := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. O resultado é um polinômio em h e H, homogêneo de grau 3. Entre os termos aparece $3h^2H$. Este termo é o único que sobrevive na imagem direta para $\mathbb{P}^5$. Ali a imagem é $3H$.

Ou seja: $[\mathbb{P}(E)] = 3h^2H \cap [\mathbb{P}(F)] +$mais termos... . Imagem direta para $\mathbb{P}^5$ dá $3H \cap [\mathbb{P}^5]$.

Todo isso mostra que a imagem de $\mathbb{P}(E)$ em $\mathbb{P}^5$ é uma hipersuperfície de grau 3. Que é justamente o lugar das cônicas singulares! (Lembre que normalmente provamos este fato observando que o lugar das cônicas singulares é dado pelo determinante, que certamente é um polinômio de grau 3.)

Para mais informações, e para código de Maple, veja o arquivo `1jet.tex`.

9 Obstrução para mergulho e imersão $X \to \mathbb{P}^n$

9.1 Proposição. —*Seja X uma curva projetiva lisa de gênero g, e seja $f : X \to X' \subset \mathbb{P}^2$ um morfismo não ramificado e biracional sobre X'. (I.e., é uma imersão: df_x é injetiva para todo $x \in X$.) Então existe um divisor efetivo $D \subset X$ tal que $f_{|X \setminus D}$ é sobre a imagem, e*

$$\int [D] = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - g.$$

9.2 Idéia. — A idéia para a construção de D é a seguinte: Considere o mapa $F : X \times X \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ dado por f em cada fator, i.e. $F(x,y) = (f(x), f(y))$. Sejam q_1 e q_2 as projeções de $X \times X$, e sejam p_1 e p_2 as de $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times X \arrow[rrr, "F"] \arrow[ddl, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & & & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \arrow[ddl, "p_1"'] \arrow[drr, "p_2"] & & \\
 & & X \arrow[rrrr, "f"'] & & & & \mathbb{P}^2 \\
X \arrow[rrr, "f"'] & & & \mathbb{P}^2 & & &
\end{tikzcd}$$

Considere a diagonal $\Delta_{\mathbb{P}^2} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ que é uma subvariedade de codimensão 2. Então o pullback $F^*\Delta_{\mathbb{P}^2}$ será o conjunto de pares de pontos de X com imagem comum em $\mathbb{P}^2$. Mas isso vai incluir todos os pares (x,x), o que não podemos admitir. Temos que descartar a diagonal de X, denotada Δ_X. Esta é um divisor de Cartier efetivo em $X \times X$. Localmente a situação é agora que o ideal de $F^*\Delta_{\mathbb{P}^2}$ é gerado por dois elementos α, β, e este ideal está contido no ideal de Δ_X que é gerado digamos por γ. Logo γ divide tanto α quanto β, e podemos escrever $\alpha = \gamma\alpha'$ e $\beta = \gamma\beta'$. Então a subvariedade de $X \times X$ definida pelo ideal gerado por α' e β' é justamente os pontos que têm imagem igual *sem serem* iguais. É o ideal do lugar dos pontos duplos. Vamos chamar de $\widetilde{D}$ este subesquema em $\subset X \times X$. O divisor que estamos procurando será então a imagem direta de $\widetilde{D}$, sob uma das projeções:

$$D := q_{1*}\widetilde{D} \subset X.$$

9.3 Construção de $\widetilde{D}$ — Vamos exibir $\widetilde{D} \subset X \times X$ como lugar de zeros de uma seção regular de um fibrado de posto 2.

9.4 — Diagonal de um produto de projetivos: aqui existe nas notas de aula uma explicação...

$\Delta_{\mathbb{P}^2} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ é o lugar de zeros de uma seção

$$s : p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow p_2^*Q$$

que interpretamos como uma seção

$$s : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2} \longrightarrow p_2^*Q \otimes p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1).$$

Agora $F^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^2})$ é o lugar de zeros da seção

$$s' : \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow F^*\big(p_2^*Q \otimes p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big).$$

O divisor $\widetilde{D}$ que nos interessa é obtido de $F^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^2})$ descartando Δ_X.

Veja as notas de aula para descrição deste passo...

, ou seja, é o lugar de zeros da seção

$$\widetilde{s} : \mathcal{O}_{X \times X} \longrightarrow F^*\big(p_2^*Q \otimes p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) \otimes \mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X).$$

Então pela proposição 6.10 temos

$$[\widetilde{D}] = c_2\big(F^*\big(p_2^*Q \otimes p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) \otimes \mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta_X)\big) \cap [X \times X].$$

Usando a fórmula (6.8) de classes de Chern de um produto tensorial, e introduzindo as simplificações notacionais

$$\begin{aligned} h_2 &:= c_1(q_2^*f^*Q) = c_1(F^*p_2^*Q) \\ h_1 &:= c_1(q_1^*f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = c_1(F^*p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) \\ \Delta &:= -c_1(\mathcal{O}_{X\times X}(-\Delta_X)) \end{aligned}$$

chegamos a

$$[\widetilde{D}] = \big(c_2(q_2^*f^*Q) + h_2(h_1 - \Delta) + (h_1 - \Delta)^2\big) \cap [X \times X]$$

O que queremos é $\int [D]$. Mas sendo $D = q_{1*}\widetilde{D}$ temos (cf. [livrinho] 3.9.2.)

$$\int [D] = \int [\widetilde{D}] = \int c_2(q_2^*f^*Q) + \int h_2h_1 + \int h_1^2 - \int h_2\Delta - 2\int h_1\Delta + \int \Delta^2$$

Calculamos essas integrais uma por uma. Sejam $a : X \to \bullet$ e $a' : X' \to \bullet$ os morfismos estruturais, então $a = a' \circ f$. As composições $a \circ q_1 = a \circ q_2$ são o morfismo estrutural de $X \times X$. Agora, os dois termos quadrados h_2^2 e h_1^2 têm integral zero:

$$\begin{aligned} \int h_1^2 &= a_*q_{1*}\big(h_1^2 \cap [X \times X]\big) \\ &= a_*q_{1*}\big(c_1(q_1^*f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^2 \cap [X \times X]\big) \\ &= a_*\big(c_1(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^2 \cap q_{1*}[X \times X]\big) && \text{fórmula de projeção} \\ &= 0, \end{aligned}$$

valendo[1] $q_{1*}[X \times X] = 0$. Um cálculo similar, usando $a \circ q_2$ em vez de $a \circ q_1$, estabelece $\int c_2(q_2^*f^*Q) = 0$.

A segunda integral depende da fórmula [livrinho], p.80 para um produto:

$$\begin{aligned} \int h_2h_1 &= \int_{X\times X} c_1\big(q_2^*f^*Q\big)c_1\big(q_1^*f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) \\ &= \int_X c_1\big(f^*Q\big) \cdot \int_X c_1\big(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) \end{aligned}$$

Aqui os cálculos são facilitados do fato de ser $f : X \to X'$ biracional: Para qualquer

[1] De fato, para qualquer fibrado E sobre X', e para qualquer classe característica c satisfazendo a fórmula de projeção, vale $q_{1*}\big(c(q_1^*E) \cap [X \times X]\big) = 0$, pelo mesmo argumento. No caso particular vale ainda mais: vale que $\int_Z h_1^2 = 0$ para qualquer classe $Z \in A_*(X \times X)$. Com efeito, $\int_Z h_1^2 = a_*\big(c_1(f^*\mathcal{O}_{P^2}(1))^2 \cap q_{1*}[Z]\big) = \int_{q_{1*}Z} c_1(f^*\mathcal{O}_{P^2}(1))^2$, que é zero por razões de dimensão.

fibrado E sobre X' vale

$$\begin{aligned}
\int_X c_1(f^*E) &= a_*\big(c_1(f^*E)\cap[X]\big) \\
&= a'_* f_*\big(c_1(f^*E)\cap[X]\big) \\
&= a'_*\big(c_1(E)\cap f_*[X]\big) && \text{fórmula de projeção} \\
&= a'_*\big(c_1(E)\cap[X']\big) && \text{porque } f \text{ é biracional} \\
&= \int_{X'} c_1(E)
\end{aligned}$$

Agora pelo teorema de Bézout temos $\int_{X'} c_1(Q) = \int_{X'} h = d$ e também $\int_{X'} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)) = \int_{X'} h = d$.

Logo

$$\boxed{\int h_2 h_1 = d^2}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\int_{X\times X} (h_1\cdot\Delta) &= a_* q_{1*}\big(h_1\cap\Delta\cap[X\times X]\big) && \text{definição de } \int_{X\times X} \\
&= a_* q_{1*}\big(h_1\cap[\Delta]\big) \\
&= a_* q_{1*}\big(c_1\big(q_1^* f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)\cap[\Delta]\big) && \text{definição de } h_1 \\
&= a_*\big(c_1\big(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)\cap[q_{1*}\Delta]\big) && \text{fórmula de projeção} \\
&= a_*\big(c_1\big(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big)\cap[X]\big) \\
&= \int_X c_1\big(f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) && \text{definição de } \int_X \\
&= \int_{X'} c_1\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) && \text{sendo } f \text{ biracional} \\
&= \int_{X'} h = d
\end{aligned}$$

Cálculos praticamente idênticos mostram que $\int(h_2\cdot\Delta) = d$ também.

9.5 Diagonais e fibrado tangente. — Para uma curva projetiva X de gênero g vale

$$\int \Delta^2 = 2-2g.$$

Com efeito, pela fórmula de auto-interseção vem $\Delta_X^2 = c_1(N_\Delta(X))\cap[\Delta_X]$, e sendo X não-singular temos isomorfismo $TX \simeq \Delta^* N_\Delta(X)$. Logo

$$= c_1(TX)\cap[X] = -c_1(\Omega_X)\cap[X] = -[Z(\omega)]$$

onde ω é alguma seção regular de Ω_X. Integrando dá menos o número de zeros de ω que sabemos ser $2-2g$.

Logo, a fórmula fica

$$\boxed{\int [D] = \int [\widetilde{D}] = d^2 - 3d + 2 - 2g}$$

Agora, certamente todo ponto ocorre duas vezes, logo podemos tomar apenas a metade, e observando que $(d-1)(d-2) = d^2 - 3d + 2$ ficamos com

$$\boxed{\int [D] == \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - g}$$

10 Pontos de Weierstrass

Dada uma curva plana não-singular $C \subset \mathbb{P}^2$ de grau $n \geq 2$. Considere o sistema linear de divisores dado pela seção hiperplana. Isto é, olhamos para o conjunto de todos os divisores obtidos como interseção $L \cap C$ onde L é uma reta.

$$L.C = \sum i(P; L \cap C)[P]$$

Para L genérica, todos os pontos P vão ser distintos. Para uma reta um pouco menos genérica pode aparecer um ponto duplo no divisor: $L.C = 2P + \cdots$. Isto é o caso quando L é tangente a C.

Entre as L tangentes, têm "tangentes excepcionais" como tangentes de inflexão — as L tais que $L.D = 3P + \cdots$, bitangentes — as retas L tal que mais que um ponto é duplo no divisor. Espera-se que dentro do sistema linear (no caso o espaço $\mathbb{P}^{2*}$ de retas em $\mathbb{P}^2$) só um número finito são degenerados assim. Mais geralmente, para um sistema linear de divisores de dimensão $r \geq 0$, espera-se que só um número finito de membros tenham um ponto com multiplicidade $\geq (r+1)$. Vamos calcular esse número, usando classes de Chern.

Seja D um divisor efetivo numa curva lisa C. Associado a ele é um fibrado em retas $L := \mathcal{O}(D)$. O sistema linear completo $|D|$ é por definição

$$|D| = \{D' \sim D \mid D' > 0\} = H^0(C, L)$$

(projetivizado). A dimensão de um tal sistema pode ser calculado via Riemann-Roch: $h^0(L) = h^1(L) + \deg L + 1 - g$, onde g é o gênero da curva.

Cada sub-espaço vetorial $V \subset H^0(X, L)$ fornece um sistema linear. Dentro de um tal sistema, quais são os membros com ponto duplo? São as seções que se anulam até ordem 2 em algum ponto de C: Localmente, pensamos em uma seção como uma função $f \in \mathcal{O}_{C,P}$, e se anular até ordem 2 significa $f \in \mathfrak{m}_P^2$. Quer dizer localmente estamos procurando o núcleo de um mapa que grosso modo é $V \to \mathcal{O}_{C,P}/\mathfrak{m}_P^2$. Vamos globalizar e especificar esta idéia.

,

Considere o produto $C \times C$ com projeções p_1 e p_2, e seja I o ideal da diagonal $\Delta \subset C \times C$. Então I^m é o ideal da diagonal gorda $m\Delta$ dos vizinhos infinitesimais de ordem $m-1$. Temos para cada $m \geq 1$ uma seqüência exata

$$I^m = \mathcal{O}(-m\Delta) \hookrightarrow \mathcal{O}_{C\times C} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{m\Delta}$$

(Pensando os objetos como fibrados vetoriais, nas fibras sobre um ponto P (pela primeira projeção), temos $mP = m\Delta_P \subset (C \times C)_P = C$.)

Seja agora L um fibrado em retas sobre C. Tensorizando a seqüência por p_2^*L obtemos

$$p_2^*L \otimes \mathcal{O}(-m\Delta) \hookrightarrow p_2^*L \twoheadrightarrow p_2^*L \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}$$

(agora as fibras sobre um ponto P são $L \twoheadrightarrow L/\mathfrak{m}_P^m L$.) O procedimento de olhar fibra por fibra se globaliza: a coisa geral é tomar imagem direta via p_1:

$$p_{1*}p_2^*L \otimes \mathcal{O}(-m\Delta) \hookrightarrow p_{1*}p_2^*L \to p_{1*}\big(p_2^*L \otimes \mathcal{O}_{m\Delta}\big)$$

Agora o último mapa não é mais sobrejetor... O módulo a direita é o feixe de partes principais $\mathcal{P}_C^{m-1}(L)$, enquanto o objeto no meio se identifica com o feixe de seções globais: $p_{1*}p_2^*L \simeq H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C$ (base change, cf. 7.1.1...). Temos então um mapa $H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{P}_C^{m-1}(L)$ (que foi chamado o homomorfismo estrutural do feixe de partes principais), e dentro de $H^0(C, L) \otimes \mathcal{O}_C$ temos $V \otimes \mathcal{O}_C$ e é a restrição a este sub-espaço que nos interessa. É o mapa

$$V \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{P}_C^{m-1}(L)$$

que deve ser pensado como um tipo de mapa de Taylor: pega uma função (uma seção) e retorna o desenvolvimento de Taylor dele até ordem $m-1$. Ou seja, se trata de calcular jato até ordem r (ou será que é até ordem $m-1$?).

Queremos saber aonde este mapa é injetivo: o mapa é não-injetivo em P se e somente se existe uma seção cujo r-jato se anula em P

Os dois módulos são de posto $r+1$ (???????)

Localmente este mapa é representado por uma matriz M $r+1$ por $r+1$. É então injetivo em P quando o determinante de M não se anula em P. Isto é que medimos quando passamos para o produto exterior superior:

$$\mathcal{O}_C \simeq \bigwedge^{r+1}(V \otimes \mathcal{O}_C) \xrightarrow{s} \bigwedge^{r+1}(\mathcal{P}_C^{m-1}(L))$$

(A matriz é localmente da forma $\frac{\partial^j s_i}{\partial t_j}$. É o Wronskiana.) Chamemos esta seção s a "seção wronskiana".

O divisor de Weierstrass do sistema V é $Z(s)$. Para calcular o seu grau: $[Z(s] = c_1(\bigwedge^{r+1}(\mathcal{P}_C^{m-1}(L))) \cap [C]$. Agora uma fórmula

$$\boxed{c_1(\bigwedge^r E) = c_1(E)}$$

nos dá

$$= c_1(\mathcal{P}_C^{m-1}(L)) \cap [C]$$

que pode ser calculado: precisa-se apenas de $c_1(L)$ e de $c_1(\Omega^1_C)$, cf. a seqüência fundamental do feixe de partes principais. Sendo

$$\begin{aligned} c_1(L) \cap [C] &= [D] \\ c_1(\Omega^1_C) \cap [C] &= [K] \end{aligned}$$

onde K é o divisor canônico. Achamos agora

$$\begin{aligned} [Z(s)] &= c_1(\mathcal{P}^{m-1}_C(L)) \cap [C] \\ &= [D] + [D+K] + [D+2K] + \cdots + [D+rK] \\ &= (r+1)[D] + \tfrac{1}{2}r(r-1)[K] \end{aligned}$$

e quando integramos achamos que o grau do divisor de Weierstrass é

$$\int [Z(s)] = (r+1)\deg D + \tfrac{1}{2}r(r-1)(2g-2)$$

No caso particular inicial onde $C \subset \mathbb{P}^2$, e o fibrado em retas é $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, e o sistema linear é o sistema completa $H^0(C, L)$ que tem dimensão $r = 2$, então achamos que o número de pontos inflexionais é

$$3d + \frac{3 \cdot 2}{2}(2g-2) = 3d(d-2).$$

Então por exemplo uma curva elítica tem 9 pontos de inflexão.