PROBLEMES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA
Curs 2007-2008

Llista 2. Flux i derivada de Lie

1. Donat un camp X en una varietat M, definim el seu flux com l'aplicació
$$\begin{array}{ccc} M \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \rightarrow & M \\ (p, t) & \mapsto & \phi_t(p) \end{array}$$
que compleix l'equació diferencial $\frac{d}{dt}\phi_t(p) = X_{\phi_t(p)}$ amb condicions inicials $\phi_0 = Id$.
   (a) Demostreu que el flux està definit localment: per tot $p \in M$ existeixen un obert $p \in U \subset M$ i un interval $(-\varepsilon, \varepsilon)$ tals que ϕ_t està definit en $U \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.
   (b) Demostreu que si M és compacte, aleshores la definició és global (en $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$)
   (c) Doneu un exemple de camp en varietat no compacte que no tingui un flux globalment definit.
   (d) Demostreu que, on està definit, $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$. En particular, quan està definit globalment, ϕ_t és un difeomorfisme.
   (e) Utilitzant l'apartat anterior, demostreu que si el flux està definit en $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, aleshores està definit en $M \times \mathbb{R}$.

2. Donats una varietat M, un camp X amb flux ϕ_t i un tensor S sobre una varietat M, la derivada de Lie es defineix com:
$$\mathcal{L}_X S_p = \frac{d}{dt}(\phi_{-t})_* S_{\phi_t(p)}$$
on $(\phi_{-t})_*$ denota l'extensió lineal als tensors de l'aplicació tangent $(\phi_{-t})_* : T_{\phi_t(p)}M \rightarrow T_pM$, que és compatible amb les contraccions i preserva el tipus tensorial. Demostreu:
   (a) $\mathcal{L}_X$ preserva el tipus, commuta amb contraccions i compleix la regla de Leibniz: $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \mathcal{L}_X T \otimes S + S \otimes \mathcal{L}_X T$.
   (b) Per una funció f, $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$.
   (c) Per un camp Y, $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.
   (d) Per una 1-forma ω, $(L_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$.

3. Per a una varietat de Riemann (M, g) i un camp X, són equivalents:
   (a) $\mathcal{L}_X g = 0$.
   (b) El flux (local) ϕ_t de X és una isometria (local) pels t que està definit.
   (c) L'endomorfisme ∇X és antisimètric[1].

   Els camps amb aquesta propietat s'anomenen camps de Killing.

[1] Si ∇ és la connexió de Levi-Civita, cosniderem l'endomorfisme $Y \mapsto \nabla_Y X$. Per tant antisimètric és equivalent a dir $g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0$