PROBLEMES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA

Curs 2007-2008

Llista 3. Varietats diferenciables i grups de Lie.

1.- Donada una varietat diferenciable M sigui TM el seu *fibrat tangent*, es a dir el conjunt dels parells (z, v) on $z \in M$ i $v \in T_z M$. Doneu a TM una estructura de varietat diferenciable respecte la qual la projecció natural $\pi : TM \to M$ és diferenciable. Una aplicació diferenciable $f : M \to N$ indueix l'aplicació $f_* : TM \to TN$ definida per $f_*(z, v) = (f(z), T_z f(v))$. Proveu que f_* és diferenciable.

2.- Sigui S^{2n-1} l'esfera unitat de $\mathbb{C}^n$. Trobeu un camp tangent a S^{2n-1} que no s'anul·li enlloc.

3.- Comproveu que el conjunt $\mathrm{Sim}(n, \mathbb{R})$ de les matrius simètriques i invertibles, i.e.

$$\mathrm{Sim}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^t = A\},$$

té una estructura natural de varietat diferenciable. Es considera l'aplicació

$$F : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sim}(n, \mathbb{R})$$

definida per $F(A) = A \cdot A^t$. Demostreu que F és una submersió en tots els punts del conjunt $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = F^{-1}(I)$ i deduïu d'aquí que $\mathrm{O}(n, \mathbb{R}^n)$ és un grup de Lie, anomenat *grup ortogonal*. Caracteritzeu la seva àlgebra de Lie $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \cong T_I\, \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

4.- Sigui $\mathfrak{g}$ l'àlgebra de Lie dels camps invariants a l'esquerra del grup lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ i denotem per $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ l'espai d eles matrius $n \times n$ amb el producte $[A, B] = AB - BA$. Comproveu que l'aplicació d'avaluació

$$\begin{array}{rcl} \beta : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \cong T_e\, \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X_e \end{array}$$

és un isomorfisme d'àlgebres de Lie.

5.- Comproveu que el grup $\mathrm{Aff}_+(\mathbb{R})$ de les afinitats positives la recta real s'identifica al grup G de les matrius

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comproveu que l'àlgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G està generada per dos elements e_1, e_2 que compleixen $[e_1, e_2] = e_2$.

6.- Determineu l'àlgebra de Lie del grup de Heisenberg $\mathcal{H}_3$.

7.- Siguin G un grup de Lie i Γ un subgrup de G. Comproveu que Γ, amb la topologia induïda per G, és un grup discret si i només si hi ha un entorn obert U de l'element neutre e de G tal que $U \cap \Gamma = \{e\}$. Demostreu que si Γ és discret l'acció de Γ sobre G per translacions a l'esquerra és lliure i pròpiament discontínua.

8.- Una varietat és orientable si admet un sistema de cartes tal que la matriu diferencial de canvi de coordenades té determinat positiu. Demostreu que una varietat M^n és orientable si i només si té una n-forma diferencial que no s'anul·la en cap punt.

9.- Es consideren, a $\mathbb{R}^n$, el camp vectorial radial $N = \sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, i l'element de volum $\eta = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Calculeu la contracció $\tau = i_N \eta$ i comproveu que la restricció de la $(n-1)$-forma τ a l'esfera unitat S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ és no nul·la. Deduïu d'aquí que S^{n-1} és orientable.

10.- Sigui M una varietat orientable i suposem que Γ actua sobre M lliurement i pròpiament discontinuament. Demostreu que la varietat quocient M/Γ és orientable si i només si l'acció de Γ preserva orientacions. Deduïu d'aquí que $\mathbb{R}P^n$ és orientable si i només si n és imparell.

11.- Sigui $(g_{ij})_{ij}$ la matriu del tensor de Riemann en coordenades locals i denotem per $\det(g_{ij})$ el seu determinant.

(a) Demostreu que la forma
$$\pm\sqrt{\det(g_{ij})}\, d\,x^1 \wedge \cdots \wedge d\,x^n$$
no depén del sistema de cartes locals. Aquesta forma s'anomena forma de volum, un cop hem escollit un signe.

(b) Demostreu que una varietat Riemanniana és orientable si i només si té una forma de volum globalment definida.

(c) Demostreu que si $e_1, \ldots, e_n$ és una base ortonormal del tangent en un obert $U \subset M$, i $\omega^1, \ldots, \omega^n$ la seva base dual, aleshores $\pm\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^n$ és una forma de volum en U.