**PROBLEMES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA**
Curs 2007-2008

**Llista 1. Preliminars**

1. Proveu que un producte escalar a $V$ defineix un isomorfisme entre $V$ i $V^*$ que permet identificar $\mathcal{T}_s^r(V)$ amb $\mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(V)$.

2. Sigui $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$ i sigui $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ la seva base dual.
   (a) Avalueu $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$.
   (b) Comproveu que $\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_k}(v_1, \dots, v_k)$ és el determinant del menor $k \times k$ de la matriu $(v_1 \dots v_k)$, obtingut seleccionant les files $i_1, \dots, i_k$.
   (c) Doneu un exemple de forma $w$ a $\mathbb{R}^n$ tal que $\omega \wedge \omega$ no sigui nul·la.

3. Comproveu que si $f \in \mathcal{L}(V, V)$ i $\dim V = n$ llavors $f^* : \bigwedge^n(V) \to \bigwedge^n(V)$ és una homotècia de raó $\lambda = \det f$.

4. Sigui $T$ un producte escalar sobre un espai vectorial orientat $V$ de dimensió $n$. Demostreu que hi ha un únic element $\eta \in \bigwedge^n(V)$ determinat per la condició que $\eta(e_1, \dots, e_n) = 1$ per a tota base ortonormal positiva $\{e_1, \dots, e_n\}$. Comproveu que, donats $v_1, \dots, v_n \in V$ es compleix

$$|\eta(v_1, \dots, v_n)| = \sqrt{\det(g_{ij})},$$

   on $g_{ij} = T(v_i, v_j)$.

5. Siguin $\omega$ una 1-forma i $X$, $Y$ dos camps. Proveu que

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$$

6. (*Lema de Cartan*) Siguin $\omega^1, \dots, \omega^k$ 1-formes linealment independents sobre una varietat $M$, i suposem que $\theta^1, \dots, \theta^k$ són 1-formes sobre $M$ tals que

$$\sum_{i=1}^{k} \theta^i \wedge \omega^i = 0.$$

   Demostreu que hi ha funcions diferenciables $A_j^i$ amb $A_j^i = A_i^j$ tals que $\theta^i = A_j^i \omega^j$, $i = 1, \dots, k$.

7. Demostreu que $\mathbb{RP}^n$ és orientable si i només si $n$ és senar.