PROBLEMES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA
Curs 2007-2008

Llista 4. Varietats de Riemann. Connexions.

1.- Comproveu que si un grup Γ actua sobre (M,g) per isometries i l'acció és lliure i própiament discontínua llavors hi ha una única mètrica $\hat{g}$ sobre M/Γ respecte la qual la projecció $\pi : M \to M/\Gamma$ és una isometria local. Per aquest procediment $\mathbb{R}P^n$ i $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ hereten mètriques de Riemann de S^n i $\mathbb{R}^2$ respectivament.

2.- Comproveu que $\mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$, amb la mètrica quocient, és isomètric al tor

$$T^2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2+y^2 = z^2+t^2 = 1\}$$

amb la mètrica induïda per $\mathbb{R}^4$.

3.- Sigui $f : M \to N$ una aplicació diferenciable entre varietats riemannianes tal que, si $\alpha : I \to M$ és una corba de M, la longitud de α i la de $f \circ \alpha$ coincideixen. Proveu que, aleshores, f és una isometria local de M en N.

4.- Proveu que les isometries preserven la connexió riemanniana. És a dir, si $f : M_1 \to M_2$ és una isometria (local) llavors $f_*(\nabla^1_X Y) = \nabla^2_{f_*X} f_*Y$. Deduïu que les isometries conserven el paral·lelisme (exercici 9) i les geodèsiques.

5.- Proveu que si f és una isometria de M tal que $f(x_0) = x_0$ i $T_{x_0}f = \mathrm{Id}_{x_0}$ per a un cert x_0, llavors $f(x) = x$ en un entorn de x_0. Què podem deduir si M és connexa?

6.- Determineu els grups d'isometries de $\mathbb{R}^n$ i de S^n amb les seves mètriques usuals.

7.- Siguin Γ i Γ' dos subgrups discrets i de rang dos de $\mathbb{R}^2$. Decidiu en quines condicions els tors $T = \mathbb{R}^2/\Gamma$ i $T = \mathbb{R}^2/\Gamma'$ són isomètrics (respecte la mètrica quocient).

8.- Suposem que dues superfícies de $\mathbb{R}^3$ són tangents al llarg d'una certa corba C. Demostreu que si C és geodèsica per una de les superfícies també ho és per l'altra.

9.- Un camp X definit al llarg d'una corba parametritzada $\alpha\colon [a,b] \to M$ s'anomena paral.lel si $\nabla_{\alpha'} X = 0$. Demostreu:

(a) Donat $v \in T_{\alpha(a)}M$ existeix un únic camp X parallel al llarg de α tal que $X_{\alpha(a)} = v$. ($X_{\alpha(b)}$ s'anomena *transport paral.lel* de v al llarg de α).

(b) El producte escalar de dos camps paral.lels al llarg de α és constant.

(c) La norma i l'angle de camps paral.lels és constant.

(d) A $\mathbf{R}^n$ amb la mètrica usual, un camp és paral.lel si i només si és constant.

(e) α és geodèsica si i només si α' és paral.lel.

10.- Siguin C_1 i C_2 dos cercles màxims de l'esfera unitat S de $\mathbb{R}^3$ que es tallen en els punts p i q segons una angle α. Siguin $w_1, w_2 \in T_pS$ els vectors obtinguts per transport paral.lel d'un vector w tangent a C_1 en el punt p al llarg de C_1 i C_2. Calculeu l'angle format per w_1 i w_2.

11.- Donat un camp X en una varietat de Riemann, definitm la seva divergència com la traça de l'operador lineal ∇X que envia $v \in T_pM$ a $\nabla_v X \in T_pM$:

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{tr}\, \nabla X.$$

Demostreu:

(a) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base ortonormal de T_pM, aleshores $\mathrm{div}(X)(p) = \sum g(e_i, \nabla_{e_i} X)(p)$.

(b) Si η és la forma de volum, aleshores $L_X \eta = \mathrm{div}(X)\eta$.

12.- Donada una funció f en una varietat de Riemann, el seu gradient $\mathrm{grad}(f)$ es defineix com l'únic camp que compleix:

$$g(\mathrm{grad}(f), X) = X(f)$$

per a tot X camp de la varietat. Demostreu:

(a) El camp $\mathrm{grad}(f)$ està ben definit. Quina és la seva expressió en coordenades locals i símbols de Christoffel?

(b) Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ és una base ortonormal de T_pM, aleshores $\mathrm{grad}(f)(p) = \sum e_i(f) e_i$.

(c) L'isomorfisme canònic entre TM i T^*M definit per la mètrica de Riemann fa correspondre el camp $\mathrm{grad}(f)$ a la forma $d\,f$.

13.- Sigui M una varietat de Riemann de dimensió n i sigui $p \in M$. Construïu, en un entorn de p, un sistema de referència ortonormal $E_1, \ldots, E_n$ tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$. Un tal sistema s'anomena una *referència geodèsica (local)* en p.

Utilitzant aquesta referència geodèsica (local) en p, demostreu:

(a) $\mathrm{div}\, X(p) = \sum_{i=1}^n E_i(X^i)(p)$ si X s'expressa com $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$.

(b) $\mathrm{grad}(f)(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f))(p) E_i(p)$

14.- Sigui f una funció diferenciable d'una varietat riemanniana M. Definim el *laplacià de* f com la següent funció de M

$$\Delta f = \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\left(f\right)\right)$$

(a) Sigui E_i un referencial geodèsic a $p \in M$, $i = 1, \cdots, n = \dim(M)$. Demostreu que

$$\Delta f\left(p\right) = \sum_{i=1}^{n} E_i\left(E_i\left(f\right)\right)\left(p\right)$$

(b) Concloeu-ne que si $M = \mathbb{R}^n$, aleshores Δ coincideix amb el laplacià usual,val a dir,

$$\Delta f\left(p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

(c) Demostreu que

$$\Delta\left(f \cdot g\right) = f\Delta g + g\Delta f + 2\left\langle \mathrm{grad}\left(f\right), \mathrm{grad}\left(g\right)\right\rangle$$

(d) Proveu que en una varietat compacta connexa les úniques funcions harmòniques (és a dir, que $\Delta f = 0$) són les constants.

15.- Direm que una corba γ és una *pregeodèsica* si existeix una reparametrització $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ tal que $\tilde{\gamma}$ és geodèsica. Proveu que γ és pregeodèsica si i només si $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = f\dot{\gamma}$, per a una certa funció f.

16.- (Semiplà de Poincaré) Considerem a $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(z) > 0\}$ la mètrica de Riemman que té per coeficients $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$ i $g_{12} = 0$.

(a) Comproveu que les aplicacions donades per

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad - bc = 1$, són isometries de $\mathbb{H}$.

(b) Comproveu que el transport paral·lel $v(t)$ del vector $v_0 = (0, \lambda) \in T_{(0,1)}\mathbb{H}$ al llarg de la corba $\alpha(t) = (t, 1)$ forma un angle $-t$ amb l'eix OY.

(c) Calculeu les geodèsiques de $\mathbb{H}$.

(d) En el disc unitat $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ es considera la mètrica de Riemann amb element de longitud $ds^2 = 4(dx^2 + dy^2)/(1 - r^2)^2$ on $r^2 = x^2 + y^2$. Comproveu que l'aplicació $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ definida per $h(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ és una isometria. Quines són les geodèsiques de $\mathbb{D}$.

17.- Es consideren els camps vectorials següents a $\mathbb{R}^3$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

i es denota per g la mètrica de Riemann a $\mathbb{R}^3$ per a la que $\{X_1, X_2, X_3\}$ és una base ortonormal. Comproveu que aquests camps formen una base de camps vectorials invariants a l'esquerra del grup de Heisengerg $\mathcal{H}_3$. Determineu els símbols de Christoffel i les geodèsiques de $\mathcal{H}_3$ respecte la mètrica g.

18.- Pensem S^3 com el conjunt de quaternions de norma 1 amb la mètrica riemanniana canònica induïda per la inclusió en $\mathbb{R}^4$. Siguin X_1, X_2, X_3 els camps de $\mathbb{R}^4$ donats per $X_1(q) = i \cdot q, X_2(q) = j \cdot q, X_3(q) = k \cdot q$.

(a) Proveu que la restricció dels X_i a S^3 defineix una base ortonormal de T_pS^3 per a tot $p \in S^3$.

(b) Calculeu els símbols de Christoffel de la connexió riemanniana de S^3 respecte aquesta base.