PROBLEMES DE GEOMETRIA RIEMANNIANA
CURVATURA
Curs 2007-2008

1. Considereu el grup de Heisenberg $\mathcal{H}$ amb una mètrica invariant per l'esquerra. Calculeu la connexió de Riemman i les curvatures seccionals associades a aquesta mètrica.

2. En un obert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, considereu la mètrica $ds^2 = f^2(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ on f és una funció diferenciable positiva. Calculeu les formes de connexió i curvatura (veure problemes per entregar). Estudieu els dos casos següents: $(\mathcal{U}, f) = (\mathbb{R}^n, \frac{2}{1+|x|^2})$ i $(\mathcal{U}, ds^2) = (\{|x| < 1\}, \frac{2}{1-|x|^2})$.

3. Comproveu que si el tensor de curvatura R d'una varietat de Riemann M és nul llavors el transport paral·lel entre dos punts és independent del camí que els uneix. Demostreu també el recíproc.

4. Sigui G un grup de Lie amb una mètrica bi-invariant. Proveu que si X, Y, Z i W són camps invariants per l'esquerra, aleshores
   (a) $g([Z, Y], X) + g(Y, [Z, X]) = 0$.
   (b) $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$.
   (c) $g(R(X, Y)Z, W) = \frac{1}{4}(g([X, W], [Y, Z]) - g([X, Z], [Y, W]))$.
   (d) La curvatura seccional no és mai negativa.

5. Parametritzeu la corba plana C, anomenada tractiu, caracteritzada perquè la longitud del segment de la recta tangent a C comprés entre el punt de tangència i una recta fixa r és constant igual a 1. Comproveu que la curvatura de Gauss de la superfície de revolució obtinguda al fer girar la tractiu al voltant de l'eix r (pseudoesfera) és constant igual a -1. És completa?

6. Proveu que si la curvatura seccional d'una varietat de Riemann és sempre negativa aleshores no poden existir punts conjugats sobre cap geodèsica.

7. A l'esfera S^n considereu $c(s) = \cos(s)x + \sin(s)v$ on v és un vector unitari tangent a l'esfera en el punt x. Si u és un altre vector unitari tangent a S^n en el punt x aleshores $H(s, t) = \cos(s)x + \sin(s)(\cos(t)v + \sin(t)u)$ és una variació de $c(s)$ per geodèsiques. Comproveu que el camp vectorial $X(s) = u$ al llarg de $c(s)$ és paral·lel. Determineu el camp de Jacobi associat i deduïu que S^n té curvatura constant igual a 1.

8. Sigui $\gamma([a, b])$ un segment geodèsic sense punts conjugats en una varietat de Riemann M. Donat $v\ nT_{\gamma(a)}M$ ortogonal a $\gamma'(a)$, proveu que existeix un únic camp de Jacobi $J(t)$ nul a $t = 0$, ortogonal a γ' amb $J(a) = v$.