MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2007-2008

Números complexos

1.- Siguin $z_1 = 1+2i$, $z_2 = -2-3i$, $z_3 = \frac{1}{2} - i$, $z_4 = -5i$. Calculeu:

$$3z_1+z_2,\ |z_1 \cdot z_2|,\ |z_1|\cdot|z_2|,\ |z_1+z_2|,\ |z_1|+|z_2|,\ z_1\cdot z_2 - z_3\cdot z_4,\ |\bar{z}_1 - \bar{z}_2^2|,\ \frac{z_1+1}{1-z_2},\ \frac{z_2}{z_4-\bar{z}_3},\ (z_1+z_3)^2\cdot\bar{z}_1$$

2.- Donat el nombre complex $z = \frac{2-xi}{2+xi}$, trobeu un nombre real x per a què la part real de z sigui zero. Hi ha algun x tal que z només tingui part real? Quins són aquests z que s'obtenen?

3.- Convertiu de radians a graus i a l'inrevés els angles següents:

$$45^o,\ \pi\,\text{rad},\ 7\frac{\pi}{3}\,\text{rad},\ 240^o,\ 2\,\text{rad},\ 136^o,\ 247^o,\ 23\,\text{rad}$$

4.- (a) Trobeu geomètricament, fent servir triangles, els valors de $\sin(\pi/4)$, $\cos(3\pi/4)$, $\tan(5\pi/4)$.

(b) Sabent que a 30m de distància la punta d'un arbre es veu en un angle de 60 graus, quina és l'alçada de l'arbre?

5.- Expresseu els nombres següents en forma polar:

$$3+4i\,,\qquad 2-i\,,\qquad -3+i\,,\qquad -2-3i\,.$$

6.- Expresseu els següents nombres complexos en la forma $a+bi$:

$$e^{i\pi}\,,\qquad e^{1/2+i\pi/4}\,,\qquad e^{e^{2+i\pi/2}}.$$

7.- Calculeu:

$$i\cdot\left(\cos(\tfrac{\pi}{7})+i\sin(\tfrac{\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{5\pi}{14})+i\sin(\tfrac{5\pi}{14})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2})+i\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$\cdot\left(\cos(\tfrac{-\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-\pi}{28})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{17\pi}{7})+i\sin(\tfrac{17\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{-85\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-85\pi}{28})\right)\ .$$

8.- Trobeu tots els complexos tals que el seu conjugat és el seu invers.

9.- Calculeu els nombres següents: $(1+i)^{29}$, $(-1+i)^{17}$, $(-\sqrt{3}+i)^{13}$. A més expresseu en la forma $x+iy$, on x i y són reals, els nombres:

$$(2+2i)^{12}\,,\qquad (1-i)^{36}\,,\qquad (-\sqrt{3}-i)^{13}\,,\qquad i^{1999}\,.$$

10.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$z^2 = i \qquad z^4 = i \qquad z^3 = 1+\sqrt{3}i$$
$$z^6 = -1+i \qquad z^5 = -i$$

11.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$e^{3z-1} = i\,,\qquad e^z = 1\,,\qquad e^{2z} = 4$$

12.- Comproveu que $1+i$ i $1-i$ són arrels del polinomi $P_1(z) = 4 - 6z + 4z^2 - z^3$. Comproveu que mentre $1+i$ és arrel del polinomi $P_2(z) = (2+2i) - 3z - iz + z^2$, $1-i$ no ho és. (Recordeu que un número a és arrel d'un polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$.)

13.- (a) Trobeu totes les arrels dels següents polinomis:

$$p_1(z) = z^3 + (i-1)z^2 + (1-i)z - 1\,, \qquad p_2(z) = z^2 + z + 1$$

$$p_3(z) = z^4 + z^2 + 1\,, \qquad p_4(z) = z^4 + 2z^2 + 10$$

Indicació: En el primer cas, una de les arrels és natural.

(b) Trobeu totes les arrels del polinomi $4z^3 - (15+20i)z^2 - (4-75i)z + 20i$ sabent que té una arrel imaginària pura.

14.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = z^4 + 2z^2 + 2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

15.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = 2z^5 + 2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

16.- (a) Considereu el polinomi $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 2x + 4$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu $p(x)$ a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$.

17.- Factoritzeu els polinomis $p_1(z) = 2z^3 + 2z^2 + 3z + 3$ i $p_2(z) = -z^3 + 4z^2 - 6z + 4$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

Indicació: Tots dos polinomis tenen una arrel entera.

18.- Trobeu un polinomi a $\mathbb{C}[z]$ de grau 3 que tingui l'arrel -3 amb multiplicitat 2 i l'arrel i amb multiplicitat 1.

19.- Trobeu tots els punts z tals que $-1+i$, $-2+3i$ i z formen un triangle equilàter.

20.- Un quadrat té els vèrtexs al semi-pla superior. Si dos vèrtexs consecutius són $2+i$ i $5+3i$, quins són els altres dos?

21.- Siguin $z_1 = 0$, z_2, z_3, $z_4 = 2+3i$, z_5, z_6 els vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular. Trobeu z_2, z_3, z_5 i z_6. Quin és el centre de l'hexàgon?

22.- Trobeu les arrels de l'equació $z^2 - (2+5i)z - 6 + 6i = 0$. Quin és el modul i l'argument de cada una? Considereu el triangle que formen aquestes arrels amb l'origen de coordenades. Quina és l'àrea del triangle? Quin és el perímetre? És rectangle?

23.- Usant la Fórmula d'Euler doneu una fórmula per $\sin(7\alpha)$ en funció de $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ i $\cos(3\alpha)$.

24.- Trobeu totes les solucions de:

$$\sin(x) = 0,\ \sin(x) = e^{\pi/2} - 1,\ \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

25.- Recordem que, amb valors apropiats d'A, φ, c_1 i c_2, l'expressió $A\sin(\omega t+\varphi)$ és equivalent a $c_1\sin(\omega t)+c_2\cos(\omega t)$. A més, fixada ω, ambdues expressions són equivalents al fasor $\mathsf{F}=A\exp(i\varphi)$.

(a) Donats els següents parells de c_1 i c_2, calculeu A, φ i el fasor associat: (1) $c_1=5$, $c_2=7$. (2) $c_1=-5$, $c_2=4$. (3) $c_1=\sqrt{2}$, $c_2=-2.5$. (4) $c_1=\sqrt{3}$, $c_2=0$. (5) $c_1=0$, $c_2=2\sqrt{2}$. (6) $c_1=-1$, $c_2=-1$.

(b) Donats els següents parells de A, φ, calculeu c_1 i c_2 i el fasor associat: (1) $A=7$, $\varphi=3\pi/7$. (2) $A=2$, $\varphi=4.54$. (3) $A=0.5$, $\varphi=-\pi/4$. (4) $A=2/\sqrt{2}$, $\varphi=5\pi/6$.

(c) Donats els fasors F següents, calculeu c_1, c_2, A i φ: (1) $\mathsf{F}=2+3i$. (2) $\mathsf{F}=4-4i$. (3) $\mathsf{F}=\sqrt{3}$. (4) $\mathsf{F}=-2i$. (5) $\mathsf{F}=-7+2i$. (6) $\mathsf{F}=-(2+i)$. (7) $\mathsf{F}=2_{3\pi/11}$. (8) $\mathsf{F}=5_{3.96}$. (9) $\mathsf{F}=0.46_{-\pi/7}$. (10) $\mathsf{F}=2\sqrt{2}_{5\pi/7}$.

26.- Un fasor $\mathsf{F}\in\mathbb{C}$ es pot escriure de la forma $A\exp(i\varphi)$ on A és l'*amplitud* i φ és el *defassament*. Donat el fasor $\mathsf{F}=-\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)$, trobeu l'amplitud i el defassament de F^3 i de $\frac{1}{\mathsf{F}}$.

27.- Digueu si les següents funcions són periòdiques o no (en cas afirmatiu, digueu el període fonamental):

(a) $\sin(\sqrt{2}t)+\cos t$,

(b) $5\sin(3t)+7\cos(5t)$,

(c) $\sin t+4\cos(2et)$,

(d) $4\sin(3t)-\sin(7t)$,

(e) $4\sin(3\sqrt{2}t)-\sin(\sqrt{2}t)$,

(f) $\sin(\sqrt{2\pi}t)+\cos t$,

(g) $-\sin(4t)+2\cos(8t)$.

28.- Expresseu l'ona $3\cos(wt)-\sqrt{3}\sin(wt)$ com una ona sinusoidal elemental trobant el fasor corresponent.

29.- Quina és la freqüència de $\sin(4t+\pi)+\cos(4t-5\pi)+\sin\left(4t+\dfrac{\pi}{2}\right)$? Escriviu–la com a ona elemental.

30.- Considereu l'ona $\sqrt{2}\cos(\omega_1 t)-2\sin(\omega_2 t)+4\sin(\omega_3 t)$ que és suma d'ones sinusoidals. Pels següents valors de ω_1, ω_2 i ω_3 digueu si es tracta d'una ona sinusoidal elemental, i si és periòdica o no. En cas de ser periòdica, trobeu el periode fonamental.

(a) $\omega_1=\omega_2=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$, $\omega_3=\sqrt{7}$.

(b) $\omega_1=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, $\omega_2=\omega_3=\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.