MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2007-2008

Àlgebra Lineal

31.- Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calculeu $A \cdot B$, $B \cdot A$ i $2A - 3B$.

Sol: $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -10 & -13 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$

32.- (a) Trobeu una matriu C tal que $2C + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Calculeu les matrius A i B que verifiquen

$$3A + 4B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \quad 5A - 3B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -30 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol: $C = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 47/29 & 2 & -117/29 \\ -8/29 & 35/29 & 2/29 \end{pmatrix}$

Sol: $B = \begin{pmatrix} 1/29 & 0 & 95/29 \\ 64/29 & 39/29 & -16/29 \end{pmatrix}$

33.- Doneu la forma reduïda per files, usant el mètode de Gauss, de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 18 & 10 & 30 & -4 \\ 8 & 22 & 24 & -22 \\ -5 & -6 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 28 & 19 & 26 & -19 \\ -3 & 8 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

Quin és el rang de cadascuna d'elles?

Sol: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **rang 2;** $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & -50 & -26 \\ 0 & 0 & 46/25 \end{pmatrix}$, **rang 3;**

$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 15 & -2 \\ 0 & 79/9 & 16/3 & -91/9 \\ 0 & 0 & 1761/79 & 962/79 \end{pmatrix}$, **rang 3;** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -11 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **rang 2;**

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 10/3 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **rang 2;** $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 18 & 15 \\ 0 & -73/5 & -374/5 & -103 \\ 0 & 0 & -2601/73 & -4149/73 \end{pmatrix}$, **rang 3;**

34.- Trobeu la matriu associada dels sistemes:

$$\text{(a)}\begin{cases} 2x & +3y & +z & = & 1 \\ x & -y & -2z & = & 2 \\ x & +2y & -z & = & 4 \end{cases} \qquad \text{(b)}\begin{cases} x & -3y & +2z & = & 6 \\ 2x & +y & -5z & = & -4 \\ 2x & -13y & +13z & = & 28 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\begin{cases} x & +y & = & 1 \\ x & +y & = & 0 \\ 3y & -z & = & 0 \end{cases} \qquad \text{(d)}\begin{cases} x & +2y & +3z & +t & = & 3 \\ 4y & +x & +5z & +2t & = & 2 \\ 2x & +8z & +9y & +3t & = & 12 \\ 3x & +7y & +7z & +2t & = & 20 \end{cases}$$

$$\text{(e)}\begin{cases} 4x & +4y & -2z & +2t & = & 2 \\ 16x & -4y & +8z & -4t & = & 4 \end{cases}$$

Trianguleu la matriu obtinguda i estudieu la compatibilitat del sistema. En el cas que existeixi solució, trobeu-la.

Sol: sistema compatible determinat, $x = -1/2, y = 13/10, z = -19/10$**; sistema compatible indeterminat,** $x = \frac{-6+13z}{7}, y = \frac{-16+9z}{7}, z = z,$**; sistema incompatible; sistema incompatible; sistema compatible determinat,** $x = \frac{3-3z+t}{10}, y = \frac{1+4z-3t}{5}, z = z, t = t,$

35.- Comproveu que el sistema següent és compatible indeterminat i té grau de llibertat 2,

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x - y + z + 2t + 2u & = & 1 \\ y + z - 2u & = & 1 \\ 2x + z + t & = & 1 \\ x - y + t + 2u & = & 0 \\ 5x + y + 3z + 2t - 2u & = & 3 \end{array}\right\}$$

Sense calcular les solucions explícitament contesteu les següents preguntes:

(a) Quin és el número màxim d'equacions independents?

(b) És la segona equació combinació de les altres? i la quarta?

(c) Hi ha alguna solució amb $x = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$? i amb $y = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}$?

Sol: (a) Tres. (b) Totes dues són combinació lineal de les altres equacions. (c) No, Sí

36.- Estudieu la compatibilitat segons el valor de λ i μ i solucioneu (si es pot) els sistemes:

$$\text{(a)}\begin{cases} x & -2y & -\lambda z & -\lambda t & = & 1-\lambda \\ 2x & +(2\lambda-4)y & +(3-2\lambda)z & -\lambda t & = & 1 \\ -2x & +(4-\lambda)y & +(2\lambda-4)z & +3\lambda t & = & -\lambda \end{cases}$$

$$\text{(b)}\begin{cases} x & +3y & +\lambda z & -\lambda t & = & 1-\lambda \\ 2x & +6y & -2z & -2(3+\lambda)t & = & -2\lambda \\ (1+\lambda)x & +(3+3\lambda)y & +(\lambda+\lambda^2)z & & = & 1+\lambda-\lambda^2 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\begin{cases} 5x & -3y & +2z & +4t & = & 3 \\ 4x & -2y & +3z & +7t & = & 1 \\ 8x & -6y & -z & -5t & = & 9 \\ 7x & -3y & +7z & +17t & = & \lambda \end{cases} \qquad \text{(d)}\begin{cases} 2x + \lambda y + z & = & 0 \\ 2x - 2y + z & = & 0 \\ \mu x + 2y - 4z & = & 0 \\ 4x + 2y + 7z & = & 0 \end{cases}$$

$$
\text{(e)}\quad \begin{cases} -2x & -2y & +2z & +4t & -4u & = & 2 \\ 2x & +2y & +2z & +4t & +2u & = & 2 \\ 2x & -2y & +2z & -2t & +2u & = & 2 \\ 2x & +2y & +4z & +4\lambda t & +\frac{1}{2}\lambda u & = & -4 \end{cases}
$$

Sol: (a) Si $\lambda = 0$, el sistema és incompatble. Si $\lambda \neq 0$ aleshores el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat $\{x = \frac{4\lambda^3-8\lambda^2+3\lambda+4}{5\lambda} + \frac{3\lambda^2+5\lambda+4}{5}t, y = \frac{2-\lambda}{5\lambda} + \frac{2}{5}t, z = \frac{4\lambda-3}{5} + \frac{3\lambda}{5}t, t = t\}$;(b) Si $\lambda = 0$, el sistema és compatible indeterminat amb dos graus de llibertat $\{x = 1 - 3y, y = y, z = 1 - 3t, t = t\}$. Si $\lambda = -1$ el sistema és incompatble. Si $\lambda \neq 0, -1$ aleshores el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat $\{x = \frac{-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1}{(1+\lambda)^2} - 3y, y = y, z = \frac{\lambda-2}{(1+\lambda)^2}, t = \frac{1}{1+\lambda}\}$;(c) Si $\lambda \neq 0$, el sistema és incompatible. Si $\lambda = 0$ el sistema és compatible indeterminat, $x = -\frac{3+5z+13t}{2}, y = -\frac{7+7z+19t}{2}, z = z, t = t$; (d) Si $\lambda \neq -2$ o bé $\lambda = -2$ i $\mu \neq -17/4$, el sistema és compatible indeterminat, $x = 0, y = 0, z = 0$; si $\lambda = -2$ i $\mu = -17/4$, el sistema és compatible indeterminat, $x = -4z/3, y = -5z/6, z = z$; (e) Si $\lambda = 2$ el sistema és incompatible; si $\lambda \neq 2$, el sistema és compatible indeterminat, $x = -\frac{3}{\lambda-2} - \frac{27}{16}u, y = \frac{3}{\lambda-2} + \frac{3}{16}u, z = \frac{\lambda+2}{\lambda-2} + \frac{3}{4}u, t = -\frac{2}{\lambda-2} - \frac{1}{8}u, u = u$

37.- (a) Estudieu la posició relativa de les rectes següents:

$$
\begin{cases} 2x + 3y - 5z + 1 & = & 0 \\ x - 2y + z - 3 & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + y - 3z - 2 & = & 0 \\ x + y + z - 1 & = & 0 \end{cases}
$$

(b) Estudieu la posició relativa de la recta i el pla següents:

$$
\begin{cases} (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 3, 4) \\ 2x - 4y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 3, 4) \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases}
$$

Sol: Les rectes es creuen. El pla i la recta no es tallen. El pla i la recta es tallen

38.- Calculeu la inversa (quan sigui possible) de les matrius següents:

$$
\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \\ 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}
$$

Sol: No té inversa. $\begin{pmatrix} -2/23 & 1/23 & 2/23 \\ 3/92 & 33/92 & -13/46 \\ 19/92 & -67/92 & 25/46 \end{pmatrix}$**. No té inversa.**

$\begin{pmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{pmatrix}$**. Si $a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0$, la matriu té inversa,**

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/a_4 \\ 0 & 0 & 1/a_3 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 & 0 \\ 1/a_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$**. Si $a \neq 0$ la matriu és invertible,**

$$\begin{pmatrix} 1/a & 0 & 0 & 0 \\ -1/a^2 & 1/a & 0 & 0 \\ 1/a^3 & -1/a^2 & 1/a & 0 \\ -1/a^4 & 1/a^3 & -1/a^2 & 1/a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

39.- Resoleu les següents equacions matricials, és a dir, trobeu un matriu X que satisfaci les següents equacions amb matrius:

(a) $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

Sol: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

40.- Calculeu els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Sol: $4, 2, -4, -76$

41.- És el vector b combinació lineal dels a_i? En cas afirmatiu, expresseu b com a combinació lineal de a_1, a_2 i a_3.

(a) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$; $b = (7, -2, 1)$.

(b) $a_1 = (4, 4, 3)$, $a_2 = (7, 2, 1)$, $a_3 = (4, 1, 6)$; $b = (5, 9, 0)$.

Sol:b no és combinació lineal dels a's. b és combinació lineal dels a's; la combinació és $\frac{287}{111}a_1 - \frac{1}{37}a_2 - \frac{143}{111}a_3$

42.- Troba la dimensió i una base dels subespais vectorials següents:

(a) $\langle (1, 0, -1), (-2, 0, 3), (3, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

(b) $\langle (1, 2, 3), (-1, 0, 2), (1, 3, 0), (0, 0, 2) \rangle$.

(c) $\langle (0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 3), (0, 0, 1, 7) \rangle$.

(d) $\langle (1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 9), (2, 1, -1, 10) \rangle$.

(e) $\langle (0, 1, -1, 1), (1, 2, 5, -1), (1, 3, 4, 0) \rangle$.

Sol: dimensió 3**, base** $\{(1, 0, -1), (-2, 0, 3), (3, 1, 0)\}$**; dimensió** 3**, base** $\{(1, 2, 3), (-1, 0, 2), (1, 3, 0)\}$**; dimensió** 3**, base** $\{(0, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 1), (0, 0, 1, 7)\}$**; dimensió** 2**, base** $\{(1, 0, -1, 1), (1, 1, 0, 9)\}$**; dimensió** 2**, base** $\{(0, 1, -1, 1), (1, 2, 5, -1)\}$

43.- Donades les matrius següents:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} -5 & 7 & -7 \\ -1 & 3 & 1 \\ -8 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{(d)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(e)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(f)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) calculeu–ne el polinomi característic i els valors propis.

(b) Calculeu–ne els vectors propis i decidiu si diagonalitzen.

(c) En cas que la matriu A diagonalitzi, doneu una matriu M de manera que $M^{-1}AM$ és diagonal. Doneu també la matriu diagonal resultant.

Sol: $p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4}$, **vaps** $1, -\frac{1}{4}$, **veps associats** $(1,1), (-2,3)$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, **vaps** $1 \pm i$, **no diagonalitza a** $\mathbb{R}$; $p(\lambda) = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 64\lambda - 96$, **vaps** $2, 4, -12$, **veps associats** $(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $p(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16$, **vaps** $-2, -2, 4$, **veps de vap** 2**:** $(1,1,0), (0,1,1)$, **vep de vap** 4 $(1,1,2)$, $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $p(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32$, **vaps** $2, 4, 4$, **vep de vap** 2**:** $(1,1,0)$, **vep de vap** 4**:** $(0,1,1)$, **no diagonalitza;**$p(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda + 8$, **vaps** $2, \pm 2i$, **no diagonalitza a** $\mathbb{R}$.

44.- (a) Donades $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, trobeu A^{1001}, B^{1000} i C^{999}.

(b) Busqueu els valors propis de $A = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -3 \end{pmatrix}$, i calculeu A^{1000} sense trobar els vectors propis.

Sol: Primer diagonalitzem la matriu A**. El polinomi característic és** $\lambda^2 - 3\lambda + 2$**. Els valors propis són** 1 **i** 2**. El vector** $(-2,1)$ **és un vector propi de valor propi** 1 **i** $(1,-1)$ **és un vector propi de valor propi** 2**. La matriu formada pels vectors propis** $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **és una matriu invertible amb inversa** $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ **que compleix** $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$**. Aleshores tenim** $A = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} M^{-1}$ **i, per tant,** $A^{1001} = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{1001} M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{1001} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2^{1001} & 2 - 2^{1002} \\ -1 + 2^{1001} & -1 + 2^{1002} \end{pmatrix}$

$A^{1001} = \begin{pmatrix} 2 - 2^{1001} & 2 - 2^{1002} \\ -1 + 2^{1001} & -1 + 2^{1002} \end{pmatrix}$, $B^{1000} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{1000} - 2 \cdot 3^{1000} & -2^{1001} + 2 \cdot 3^{1000} \\ 3 \cdot 2^{1000} - 3^{1000} & -2^{1001} + 3^{1001} \end{pmatrix}$,

$C^{999} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \cdot 2^{1000} - \frac{1}{7} \cdot 5^{999} & \frac{1}{7} \cdot 2^{1000} + \frac{2}{7} \cdot 5^{999} \\ \frac{3}{7} \cdot 2^{999} + \frac{3}{7} \cdot 5^{999} & \frac{1}{7} \cdot 2^{999} - \frac{6}{7} \cdot 5^{999} \end{pmatrix}$. $A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

45.- Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, determineu si els plans $y + z = 0$, $x - y = 0$ i $x + y + z = 0$ són invariants per l'aplicació lineal $x \mapsto A \cdot x$.

Sol: l'únic pla invariant és el tercer