MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2007-2008

Equacions Diferencials

54.- Resoleu les següents equacions diferencials de variables separades:

$$\text{(a)}\quad y' = \frac{1-x}{1+y}, \qquad \text{(b)}\quad y' = \frac{x^2e^x}{y-a}, \qquad \text{(c)}\quad y' = \frac{1+x^2}{1+y^2},$$

$$\text{(d)}\quad y' = -y\tan(x), \qquad \text{(e)}\quad y' = -\frac{(y+1)^2}{yx^2-y}, \qquad \text{(f)}\quad y' = x\sqrt{1-y^2}.$$

Solucions: (a) $y = -1 \pm \sqrt{1+2x-x^2+C}$**, (b)** $y = a \pm \sqrt{a^2+(x^2-2x+2)2e^x+C}$**,**
(c) $y^3+3y-3x-x^3-C=0$**, (d)** $y = K\cos(x)$ **per** $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$**,**
(e) $\ln|y+1| + \frac{1}{y+1} = \frac{1}{2}\ln|\frac{x+1}{x-1}| + C$**, (f)** $y = \sin(\frac{x^2}{2}+C)$**.**

55.- Resoleu les següents equacions diferencials exactes:

$$\text{(a)}\quad (y-x^3)\mathrm{d}x + (x+y^3)\mathrm{d}y = 0, \qquad \text{(b)}\quad (\sin x\sin y - xe^y)\mathrm{d}y = (e^y+\cos x\cos y)\mathrm{d}x,$$

$$\text{(c)}\quad (4x^3y^3-2xy) + (3x^4y^2-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \qquad \text{(d)}\quad 2x\sin y + y^3e^x + (x^2\cos y + 3y^2e^x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Solucions: (a) $4yx-x^4+y^4+C=0$**, (b)** $e^yx+\sin(x)\cos(y)+C=0$**, (c)** $x^4y^3-x^2y+C=0$**,**
(d) $x^2\sin(y)+y^3e^x+C=0$**.**

56.- Resoleu les següents equacions diferencials lineals:

$$\text{(a)}\quad y'+y=e^{3x}, \qquad \text{(b)}\quad y'+2xy=x^3,$$

$$\text{(c)}\quad y' = -2\frac{y}{x} - 2x, \qquad \text{(d)}\quad y' = \tan(x)y - \cos(x).$$

Solucions: (a) $y(x) = \frac{1}{4}e^{3x}+Ce^{-x}$**, (b)** $y(x) = \frac{x^2-1}{2}+Ce^{-x^2}$**, (c)** $y(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{C}{x^2}$**,**
(d) $y(x) = -\frac{1}{\cos(x)}(\frac{\sin(2x)+2x+C}{4})$**.**

57.- Resoleu les següents equacions diferencials:

$$\text{(a)}\quad y\cos(x)+2xe^y+(\sin(x)+x^2e^y+2)y'=0, \quad \text{(b)}\quad y'-2xy=2xe^{x^2}, \quad \text{(c)}\quad y'=e^{2x+5y}.$$

Solucions: (a) $y\sin(x)+x^2e^y+2y+c=0$**, (b)** $y(x) = (x^2+C)e^{x^2}$**, (c)** $y(x) = -\frac{1}{5}\ln(-\frac{5}{2}e^{2x}+C)$**.**

58.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials de segon ordre $x''-4x'+5x=f(t)$, pels casos següents:

$$\text{(a)}\quad f(t)=0, \qquad \text{(b)}\quad f(t)=e^t, \qquad \text{(c)}\quad f(t)=te^{2t},$$

$$\text{(d)}\quad f(t)=3e^t+2te^{2t}, \qquad \text{(e)}\quad f(t)=e^t+e^{-t}, \qquad \text{(f)}\quad f(t)=e^{2t}(\cos t+3\sin t),$$

Solucions: (a) $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)$**, (b)** $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)+\frac{1}{2}e^t$**,**
(c) $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)+te^{2t}$**, (d)** $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)+\frac{3}{2}e^t+2te^{2t}$**,**
(e) $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)+\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{10}e^{-t}$**, (f)** $x(t) = C_1e^{2t}\sin(t)+C_2e^{2t}\cos(t)+te^{2t}(-\frac{3}{2}\cos(t)+\frac{1}{2}\sin(t))$**.**

59.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials de segon ordre següents:

(a) $x'' + 5x' + 4x = 3 - 2t$, (b) $x'' - 2x' = t^2 + 2t - 1$,
(c) $x'' - x' - 2x = 2e^{3t}$, (d) $3x'' + 2x' - x = 2\sin t$.

Solucions: (a) $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t} + \frac{11}{8} - \frac{1}{2}t$**, (b)** $x(t) = C_1 + C_2e^{2t} - \frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t$**, (c)** $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}$**, (d)** $x(t) = C_1e^{\frac{t}{3}} + C_2e^{-t} - \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t)$**.**

Solució desenvolupada de 58d:

Primer resolem l'equació homogènia $3x'' + 2x' - x = 0$**. El polinomi característic és** $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ **que té per arrels** $\frac{1}{3}$ **i** -1 **amb multiplicitat** 1**. Per tant, la solució general de l'euqació homogènia és**

$$x(t) = C_1e^{\frac{1}{3}t} + C_2e^{-t}.$$

Ara busquem una solució particular de la forma $x(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$ **ja que la part no homogènia de l'equació** $2\sin(t)$ **és una combinació lineal de funcions trigonomètriques. Aleshores**

$$x'(t) = A\cos(t) - B\sin(t),$$

$$x''(t) = -A\sin(t) - B\cos(t),$$

i si substituim a l'equació obtenim

$$(-4A - 2B)\sin(t) + (2A - 4B)\cos(t) = 2\sin(t),$$

per tant hem de resoldre el sistema

$$-4A - 2B = 2$$

$$A - 2B = 0,$$

que té per solucions $A = -\frac{2}{5}$ **i** $B = -\frac{1}{5}$**.**

La solució de l'exercici és

$$x(t) = C_1e^{\frac{1}{3}t} + C_2e^{-t} - \frac{2}{5}\sin(t) - \frac{1}{5}\cos(t).$$

60.- Trobeu la solució general de les equacions diferencials següents:

(a) $x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = 0$, (b) $x^{(3)} - x'' - 8x' + 12x = 0$,
(c) $x^{(8)} - 8x^{(4)} + 16x = 0$, (d) $x^{(3)} - 3x'' + 3x' - x = e^t$,
(e) $x^{(3)} - x' = e^t(t^2 - 1)$, (f) $x^{(5)} - 4x^{(4)} + 4x^{(3)} = 240t^2 + 4e^{2t}$.

Solucions: (a) $x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t$**, (b)** $x(t) = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3e^{-3t}$**, (c)** $x(t) = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2te^{\sqrt{2}t} + C_3e^{-\sqrt{2}t} + C_4te^{-\sqrt{2}t} + C_5\cos(\sqrt{2}t) + C_6\sin(\sqrt{2}t) + C_7t\cos(\sqrt{2}t) + C_8t\sin(\sqrt{2}t)$**, (d)** $x(t) = C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t + \frac{1}{6}t^3e^t$**, (e)** $x(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{-t} + e^t(\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{5}{4}t)$**, (f)** $x(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4e^{2t} + C_5te^{2t} + t^5 + 5t^4 + 15t^3 + \frac{1}{4}t^2e^{2t}$**.**

61.- Trobeu la solució de les següents equacions diferencials que satisfà les condicions inicials o de frontera fixades:

(a) $x'' - 4x' + 5x = 0$, $x(\pi/2) = 1$, $x'(\pi/2) = 0$,

(b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$, $x(0) = x'(\pi/2) = 0$, $x'(0) = x(\pi/2) = 1$,

(c) $x'' - 2x' - 3x = 6 - 8e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$,

(d) $x'' + 6x' + 10x = \sin t$, $x(0) = x'(0) = 0$,

(e) $x''' - x'' + x' - x = 12te^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,

(f) $x'' + 2x' + x = 9te^{2t}$, $x(0) = \dfrac{1}{3}$, $x'(0) = \dfrac{4}{3}$.

Solucions: (a) $x(t) = e^{2t}(2e^{-\pi}\cos(t) + e^{-\pi}\sin(t))$, **(b)** $x(t) = \sin(t)$, **(c)** $x(t) = -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - 2 + 2e^t$, **(d)** $x(t) = \frac{2}{39}e^{-3t}\cos(t) + \frac{1}{13}e^{-3t}\sin(t) + \frac{1}{13}\sin(t) - \frac{2}{39}\cos(t)$, **(e)** $x(t) = 3e^t - 3\cos(t) + 3\sin(t) + (3t^2 - 6t)e^t$, **(f)** $x(t) = e^{-t} + \frac{8}{3}te^{-t} + (t - \frac{2}{3})e^{2t}$.

Solució desenvolupada de 60(e):

Primer resolem l'equació homogènia $x''' - x'' + x' - x = 0$. El polinomi característic de l'equació és $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ que té per arrels 1, i i $-i$ amb multiplicitat 1. Aleshores la solució general de l'equació homogènia és

$$x(t) = C_1e^t + C_2\cos(t) + C_3\sin(t).$$

Per a trobar una solució particular fem servir el mètode dels coeficients indeterminats i busquem una solució de la forma

$$x(t) = t(At + B)e^t$$

perquè la part no homogènia de l'equació $12te^t$ és el producte d'un polinomi per una exponencial $(At + B)e^t$ però ens cal multiplicar per t a la forma general que busquem ja que sinó Be^t és solució de l'equació homogènia. Aleshores, si derivem tres vegades

$$x'(t) = (At^2 + (B + 2A)t + B)e^t$$
$$x''(t) = (At^2 + (B + 4A)t + 2B + 2A)e^t$$
$$x'''(t) = (At^2 + (B + 6A)t + 3B + 6A)e^t$$

i substituim a l'equació diferencial

$$4Ate^t + (2B + 4A)e^t = 12te^t$$

d'on obtenim dues equacions per trobar els valors de A i B:

$$4A = 12,$$
$$2B + 4A = 0,$$

i per tant, $A = 3$ i $B = -6$. Així doncs, una solució particular és $x(t) = (3t^2 - 6t)e^t$.

La solució general del sistema és

$$x(t) = C_1e^t + C_2\cos(t) + C_3\sin(t) + (3t^2 - 6t)e^t.$$

Finalment hem de trobar els valors de C_1, C_2 i C_3 per tal que es compleixi $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Substituint a les fòrmules de $x(t)$, $x'(t)$ i $x''(t)$ obtenim

$$x(0) = C_1 + C_2$$

$$x'(t) = C_1e^t - C_2\sin(t) + C_3\cos(t) + (3t^2-6)e^t, \quad x'(0) = C_1 + C_3 - 6,$$
$$x''(t) = C_1e^t - C_2\cos(t) - C_3\cos(t) + (3t^2+6t-6)e^t, \quad x''(0) = C_1 - C_2 - 6$$

Si igualem les tres equacions a zero i resolem obtenim $C_1 = 3$, $C_2 = -3$ i $C_3 = 3$. Per tant la solució de l'exercici és

$$x(t) = 3e^t - 3\cos(t) + 3sin(t) + (3t^2 - 6t)e^t.$$

62.- Calculeu la solució general dels següents sistemes d'equacions diferencials:

(a) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' = y + 6t \\ y' = 4x - 2 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x' = -x - y + 2e^{-t} \\ y' = 4x - y \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = y - 2x \\ z' = -2z \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x' = x - z + t \\ y' = 2y - 2t^2 \\ z' = x + z + 2 \end{cases}$

Trobeu una equació diferencial a coeficients constants equivalent als sistemes d'equacions diferencials anteriors.

Solucions: (a) $\{x(t) = C_1e^{2t}+C_2e^t, y(t) = -2C_1e^{2t}-C_2e^t\}$**, (b)** $\{x(t) = C_1e^{3t}+C_2e^{-t}, y(t) = C_1e^{3t} - C_2e^{-t}\}$**, (c)** $\{x(t) = C_1 + C_2e^{4t}, y(t) = -3C_1 - C_2e^{4t}\}$**, (d)** $\{x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 1, y(t) = 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t} - 6t\}$**, (e)** $\{x(t) = C_1e^{-t}\cos(2t) + C_2e^{-t}\sin(2t), y(t) = 2C_1e^{-t}\cos(2t) - 2C_2e^{-t}\sin(2t) + 2e^{-t}\}$**,** $\{x(t) = C_1e^{-t}+C_2, y(t) = C_1e^{-t}+2C_2, z(t) = C_3e^{-2t}\}$**, (g)** $\{x(t) = C_1e^t\cos(t) + C_2e^t sin(t) - \frac{1}{2}t - 1, y(t) = C_3e^{2t} - t^2 - t - \frac{1}{2}, z(t) = C_1e^t\sin(t) - C_2e^t\cos(t) + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\}$

Solució desenvolupada del 63d:

- **Mètode matricial: en forma matricial, el sistema es pot escriure com**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6t \\ -2 \end{pmatrix}$$

Diagonalitzarem la matriu del sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. El polinomi característic és $\lambda^2 - 4$. Els valors propis són 2 i -2 amb multiplicitat 1. Els vectors propis corresponents són $(1,2)$ i $(1,-2)$. La matriu diagonal és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. La matriu dels vectors propis és $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ i la seva inversa és $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$. Fem el canvi de variable $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, multiplicant el sistema matricial per M^{-1} per l'esquerra obtenim

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + M^{-1}\begin{pmatrix} 6t \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3t - \frac{1}{2} \\ 3t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

que correspon a dues equacions lineals de primer ordre

$$\begin{cases} u' &= 2u + 3t - \frac{1}{2} \\ v' &= -2v + 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si les resolem cadascuna per separat obtenim les solucions

$$\begin{cases} u(t) &= -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + C_1e^{2t} \\ v(t) &= \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + C_2e^{-2t} \end{cases}$$

Ara només ens falta desfer el canvi per calcular les solucions

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + C_1e^{2t} \\ \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} + C_2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

I les solucions són

$$\begin{cases} x(t) &= -1 + C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} \\ y(t) &= -6t + 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t} \end{cases}$$

- Mètode per reducció a una equació lineal de segon ordre amb coeficients constants:

  Si aïllem y de la primera equació obtenim $y = x' - 6t$. Aleshores al derivar ens surt $y' = x'' - 6$. Si substituim els valors de y i y' obtinguts a la segona equació ens surt $x'' - 6 = 4x - 2$. Per tant, l'equació de segon grau $x'' - 4x = 4$ ens donarà el valor de x.

  Per resoldre l'equació $x'' - 4x = 4$ hem de seguir dos pasos. Primer resolem l'equació homogènia $x'' - 4x = 0$ que té polinomi característic $\lambda^2 - 4 = 0$ amb arrels 2 i -2 amb multiplicitat 1 i, per tant, solució general $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$. Després busquem una solució particular de la forma x(t)=A (polinomi de grau 0), $x' = x'' = 0$ i per tant al substituir a l'equació ens queda $-4A = 4$, que ens dóna $A = -1$. La solució general és

  $$x(t) = -1 + C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}.$$

  Aleshores

  $$y(t) = x'(t) - 6t = -6t + 2C_1e^{2t} - 2C_2e^{-2t}$$

Solució desenvolupada del 63e:

- Mètode per reducció a una equació lineal de segon ordre amb coeficients constants:

  Si aïllem y de la primera equació obtenim $y = -x' - x + 2e^{-t}$. Aleshores al derivar ens surt $y' = -x'' - x' - 2e^{-t}$. Si substituim els valors de y i y' obtinguts a la segona equació ens surt $-x'' - x' - 2e^{-t} = 4x - (-x' - x + 2e^{-t})$. Per tant, l'equació de segon grau $x'' + 2x' + 5x = 0$ ens donarà el valor de x.

  Fixeu-vos que l'equació $x'' + 2x' + 5x = 0$ és homogènia. L'equació homogènia $x'' + 2x' + 5x = 0$ té polinomi característic $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ amb arrels complexes conjugades $-1 + 2i$ i $-1 - 2i$ amb multiplicitat 1 i, per tant, solució general

  $$x(t) = C_1e^{-t}\cos(2t) + C_2e^{-t}\sin(2t).$$

  Aleshores

  $$y(t) = -x'(t) - x(t) + 2e^{-t} = 2C_1e^{-t}\sin(2t) - 2C_2e^{-t}\cos(2t) + 2e^{-t}$$

63.- La caiguda de tensió a través de l'inductor és $L\frac{di}{dt}$, la caiguda de tensió a través de la resistència és $Ri = R\frac{di}{dt}$ i la caiguda de tensió a través del condensador és $\frac{1}{C}q$. En un circuit RLC forçat per una font externa, $E(t)$, la caiguda de tensió, $V(t)$, a través del condensador compleix l'equació diferencial

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + RC\frac{dV}{dt} + V(t) = E(t).$$

(a) Trobeu la càrrega del condensador en un circuit RLC per temps $t = 0.01$s quan $R = 2\Omega$, $L = 0.05$h, $C = 0.01$f, $E(t) = 0$V, $q(0) = 5$C i $i(0) = 0$A. Quin és el primer moment pel que la càrrega del condensador és zero?

(b) Trobeu la càrrega del condensador, $q(t)$, i la intensitat de corrent, $i(t)$, en un circuit RLC on $R = 10\Omega$, $L = \frac{5}{3}$h, $C = \frac{1}{30}$f, $E(t) = 300$V, $q(0) = 0$C i $i(0) = 0$A.

Solucions: $q(t) = 5.6e^{-20t}\sin(40t+1.107)$**,** $t = 0.051$**, (b)** $q(t) = -e^{-3t}(\cos(3t)+\sin(3t))+10$**,** $I(t) = 6e^{-3t}\sin(3t)$**.**

64.- L'equació d'un oscil·lador harmònic forçat té la forma $\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t)$ on la funció $f(t)$ s'anomena funció de forçament.

(a) Comproveu que en el cas que $p = 0$, $q = 9$ i $f(t) = e^{-t}$ no hi ha cap solució periòdica.

(b) Quines són les solucions periòdiques si $p = 0$, $q = 2$ i $f(t) = \sin(t)$?

(c) Quin és el comportament de l'amplitud en el cas $p = 0$, $q = 1$ i $f(t) = \sin(t)$?

Solucions: (a) $x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\sin(3t) + \frac{1}{10}e^{-t}$**, no hi ha cap solució periòdica ja que** e^{-t} **no és una funció periòdica, (b)** $x(t) = C_1\cos(\sqrt{2}t) + C_2\sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)$**, com que** $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}$ **no és un número racional, l'única possiblitat d'obtenir una solució periòdica és si** $C_1 = C_2 = 0$**, aleshores** $x(t) = \sin(t)$**, (c)** $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 - C_1t + \frac{1}{4}t^2}$**, observeu que per valors de** t **prou grans és una funció creixent.**

65.- Segons la llei de refredament de Newton, la velocitat a la que es refreda una substància és proporcional a la diferència de temperatura entre la substància i l'ambient. Si la temperatura ambient és de 30$^{\circ C}$ i la substància es refreda de 100$^{\circ C}$ a 70$^{\circ C}$ en 15 minuts, en quin moment es trobarà a 40$^{\circ C}$? **Solució:** 52.16 **minuts**

66.- En un campus aïllat de 1000 estudiants, un estudiant que ha marxat durant el cap de setmana torna infectat per un virus. Si es suposa que la velocitat amb la que el virus es propaga és proporcional al producte entre el nombre d'estudiants contagiats i el de no contagiats, trobeu el nombre d'estudiants contagiats després de sis dies, si a més s'observa que després de quatre dies n'hi ha 50. **Solució:** 733 **estudiants.**

67.- Es bombeja cervesa amb un contingut d'alcohol del 6% per litre dins d'un dipòsit que inicialment conté 400L. de cervesa amb un 3% d'alcohol. La cervesa es bombeja a l'interior amb una velocitat de 3L. per minut, mentre que el líquid barrejat es bombeja a l'exterior amb una velocitat de 4L. per minut. Trobeu el número de litres d'alcohol que hi ha dins del dipòsit en un instant qualsevol. Quin és el percentatge d'alcohol que hi ha en el dipòsit després de 60 minuts? Quant trigarà a buidar-se el dipòsit? **Solució:** 4.16%**,** 400 **minuts**

68.- Per raons òbvies, la sala de dissecció d'un forense es manté freda a una temperatura constant de 5$^{\circ C}$. Mentre es trobava realitzant l'autòpsia d'una víctima d'un assassinat, el mateix forense és assassinat, i el cos de la víctima robat. A les 10 del matí l'ajudant del forense troba el seu cadàver a una temperatura de 23$^{\circ C}$. A les 12 del matí la seva temperatura és de 18.5$^{\circ C}$. Si suposem que el forense tenia en vida la temperatura normal de 37$^{\circ C}$, a quina hora va ser assassinat? **Solució: A les** 6**.**