MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2008-2009

Números complexos

1.- Siguin $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 - 3i$, $z_3 = \frac{1}{2} - i$, $z_4 = -5i$. Calculeu:

$$3z_1+z_2,\ |z_1\cdot z_2|,\ |z_1|\cdot|z_2|,\ |z_1+z_2|,\ |z_1|+|z_2|,\ z_1\cdot z_2 - z_3\cdot z_4,\ |\bar{z}_1-\bar{z}_2^2|,\ \frac{z_1+1}{1-z_2},\ \frac{z_2}{z_4-\bar{z}_3},\ (z_1+z_3)^2\cdot\bar{z}_1$$

Sol: $1+3i, \sqrt{65}, \sqrt{65}, \sqrt{2}, \sqrt{5}+\sqrt{13}, 9-\frac{9}{2}i, 2\sqrt{34}, \frac{2}{3}, \frac{76}{145}-\frac{42}{145}i, \frac{29}{4}+\frac{1}{2}i$

2.- Donat el nombre complex $z = \frac{2-xi}{2+xi}$, trobeu un nombre real x per a què la part real de z sigui zero. Hi ha algun x tal que z només tingui part real? Quins són aquests z que s'obtenen?

Sol: $x = \pm 2$, $x = 0$, $z = -i, i, 1$

3.- Convertiu de radians a graus i a l'inrevès els angles següents:

$$45^o,\ \pi\,\mathrm{rad},\ 7\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad},\ 240^o,\ 2\,\mathrm{rad},\ 136^o,\ 247^o,\ 23\,\mathrm{rad}$$

Sol: $\frac{\pi}{4}$ **rad,** 180^o**,** 420^o**,** $\frac{4}{3}\pi$ **rad,** $\frac{360}{\pi}^o$**,** $\frac{34}{45}\pi$ **rad,** $\frac{247}{180}\pi$ **rad,** $\frac{4140}{\pi}^o$

4.- (a) Trobeu geomètricament, fent servir triangles, els valors de $\sin(\pi/4)$, $\cos(3\pi/4)$, $\tan(5\pi/4)$.
Sol: $\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1$

(b) Sabent que a 30m de distància la punta d'un arbre es veu en un angle de 60 graus, quina és l'alçada de l'arbre?
Sol: $30\sqrt{3}$

5.- Expresseu els nombres següents en forma polar:

$$3+4i\,, \qquad 2-i\,, \qquad -3+i\,, \qquad -2-3i\,.$$

Sol: $5e^{0.9273i}, \sqrt{5}e^{5.8195i}, \sqrt{10}e^{2.8198i}, \sqrt{13}e^{4.1244i}$

6.- Expresseu els següents nombres complexos en la forma $a+bi$:

$$e^{i\pi}\,, \qquad e^{1/2+i\pi/4}\,, \qquad e^{e^{2+i\pi/2}}.$$

Sol: $-1, \frac{\sqrt{2e}}{2}+\frac{\sqrt{2e}}{2}i, \cos\left(e^2\right)+i\sin\left(e^2\right)$

7.- Calculeu:

$$i\cdot\left(\cos(\tfrac{\pi}{7})+i\sin(\tfrac{\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{5\pi}{14})+i\sin(\tfrac{5\pi}{14})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{3\pi}{2})+i\sin(\tfrac{3\pi}{2})\right)$$
$$\cdot\left(\cos(\tfrac{-\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-\pi}{28})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{17\pi}{7})+i\sin(\tfrac{17\pi}{7})\right)\cdot\left(\cos(\tfrac{-85\pi}{28})+i\sin(\tfrac{-85\pi}{28})\right)\ .$$

Sol: $\cos\left(\frac{13}{7}\pi\right)+i\sin\left(\frac{13}{7}\pi\right)$

8.- Trobeu tots els complexos tals que el seu conjugat és el seu invers.

Sol: Són els números complexos z amb mòdul igual a 1**,** $|z|=1$

9.- Calculeu els nombres següents: $(1+i)^{29}$, $(-1+i)^{17}$, $(-\sqrt{3}+i)^{13}$. A més expresseu en la forma $x+iy$, on x i y són reals, els nombres:

$$(2+2i)^{12}\,, \qquad (1-i)^{36}\,, \qquad (-\sqrt{3}-i)^{13}\,, \qquad i^{1999}\,.$$

Sol: $-16384-16384i$**,**$-256+256i$**,**$-4096\sqrt{3}+4096i$**,**-262144**,**-262144**,**$-4096\sqrt{3}-4096i$**,**$-i$

10.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$z^2 = i \qquad z^4 = i \qquad z^3 = 1+\sqrt{3}i$$
$$z^6 = -1+i \qquad z^5 = -i$$

Sol:$\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$**,**$\{e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8}\}$**,**$\{\sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}, \sqrt[3]{2}e^{i7\pi/9}, \sqrt[3]{2}e^{i13\pi/9}\}$**,**
$\{\sqrt[12]{2}e^{i\pi/8}, \sqrt[12]{2}e^{i11\pi/24}, \sqrt[12]{2}e^{19i\pi/24}, \sqrt[12]{2}e^{9i\pi/8}, \sqrt[12]{2}e^{35i\pi/24}, \sqrt[12]{2}e^{43i\pi/24}\}$
$\{e^{i3\pi/10}, e^{i7\pi/10}, e^{i11\pi/10}, e^{i3\pi/2}, e^{i19\pi/10}\}$

11.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$e^{3z-1} = i\,, \qquad e^z = 1\,, \qquad e^{2z} = 4$$

Sol: $\frac{1}{3}+i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$**,** $2k\pi i$ **on** $k\in\mathbb{Z}$**,** $\ln 2 + k\pi i$ **on** $k\in\mathbb{Z}$

12.- Comproveu que $1+i$ i $1-i$ són arrels del polinomi $P_1(z) = 4-6z+4z^2-z^3$. Comproveu que mentre $1+i$ és arrel del polinomi $P_2(z) = (2+2i)-3z-iz+z^2$, $1-i$ no ho és. (Recordeu que un número a és arrel d'un polinomi $p(x)$ si $p(a)=0$.)

Sol: $P_1(1+i)=0$**,** $P_1(1-i)=0$ **però** $P_2(1+i)=0$ **i** $P_2(1-i) = -2+2i \neq 0$**.**

13.- (a) Trobeu totes les arrels dels següents polinomis:

$$p_1(z) = z^3+(i-1)z^2+(1-i)z-1\,, \qquad p_2(z) = z^2+z+1$$
$$p_3(z) = z^4+z^2+1\,, \qquad p_4(z) = z^4+2z^2+10$$

Indicació: En el primer cas, una de les arrels és natural.
Sol:

- **les arrels de** $p_1(z)$ **són** 1**,** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}i$**,** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}i$
- **les arrels de** $p_2(z)$ **són** $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **i** $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- **les arrels de** $p_3(z)$ **són** $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$**,** $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$**,** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **i** $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- **les arrels de** $p_4(z)$ **són** $\sqrt[4]{10}e^{0.9463i}$**,** $\sqrt[4]{10}e^{2.1953i}$**,** $\sqrt[4]{10}e^{4.0879i}$ **i** $\sqrt[4]{10}e^{5.3369i}$

(b) Trobeu totes les arrels del polinomi $4z^3-(15+20i)z^2-(4-75i)z+20i$ sabent que té una arrel imaginària pura. **Sol:** $5i$**,** 4**,** $\frac{-1}{4}$

14.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = z^4+2z^2+2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).
Sol: $\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i}$**,** $\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{8}i}$**,** $\sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i}$**,** $\sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{8}i}$

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.
Sol: a $\mathbb{C}[z]$ **tenim** $p(z) = (z-\sqrt[4]{2}e^{\frac{3\pi}{8}i})(z-\sqrt[4]{2}e^{\frac{5\pi}{8}i})(z-\sqrt[4]{2}e^{\frac{11\pi}{8}i})(z-\sqrt[4]{2}e^{\frac{13\pi}{8}i})$**, i a** $\mathbb{R}[z]$ **tenim** $p(z) = ((z-0.4551)^2+1.2071)((z+0.4551)^2+1.2071)$

15.- (a) Considereu el polinomi $p(z) = 2z^5 + 2$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

Sol: $-1, e^{\frac{\pi}{5}i}$, $e^{\frac{3\pi}{5}i}$, $e^{\frac{7\pi}{5}i}$, $e^{\frac{9\pi}{5}i}$

(b) Factoritzeu $p(z)$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

Sol: a $\mathbb{C}[z]$ **tenim** $p(z) = 2(z+1)(z-e^{\frac{\pi}{5}i})(z-e^{\frac{3\pi}{5}i})(z-e^{\frac{7\pi}{5}i})(z-e^{\frac{9\pi}{5}i})$**, i a** $\mathbb{R}[z]$ **tenim** $p(z) = 2(z+1)(z^2 - 1.6180z + 1)(z^2 + 0.6180z + 1)$

16.- (a) Considereu el polinomi $p(x) = 2x^6+4x^5+2x+4$. Trobeu totes les arrels a $\mathbb{C}$ i escriviu–les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

Sol: $-1, -2, e^{\frac{\pi}{5}i}$, $e^{\frac{3\pi}{5}i}$, $e^{\frac{7\pi}{5}i}$, $e^{\frac{9\pi}{5}i}$

(b) Factoritzeu $p(x)$ a $\mathbb{R}[x]$ i a $\mathbb{C}[x]$. **Sol: a** $\mathbb{C}[x]$ **tenim** $p(z) = 2(x+1)(x+2)(x-e^{\frac{\pi}{5}i})(x-e^{\frac{3\pi}{5}i})(x-e^{\frac{7\pi}{5}i})(x-e^{\frac{9\pi}{5}i})$**, i a** $\mathbb{R}[x]$ **tenim** $p(z) = 2(x+1)(x+2)(x^2 - 1.6180x + 1)(x^2 + 0.6180x + 1)$

17.- Factoritzeu els polinomis $p_1(z) = 2z^3 + 2z^2 + 3z + 3$ i $p_2(z) = -z^3 + 4z^2 - 6z + 4$ a $\mathbb{R}[z]$ i a $\mathbb{C}[z]$.

Indicació: Tots dos polinomis tenen una arrel entera.

Sol: a $\mathbb{C}[z]$ **tenim** $p_1(z) = 2(z+1)(z-\frac{\sqrt{6}}{2}i)(z+\frac{\sqrt{6}}{2}i)$ **i** $p_2(z) = -(z-2)(z-1-i)(z-1+i)$**. A** $\mathbb{R}[z]$ **tenim** $p_1(z) = 2(z+1)(z^2+\frac{3}{2})$ **i** $p_2(z) = -(z-2)(z^2-2z+2)$**.**

18.- Trobeu un polinomi a $\mathbb{C}[z]$ de grau 3 que tingui l'arrel -3 amb multiplicitat 2 i l'arrel i amb multiplicitat 1.

Sol: $z^3 + (6-i)z^2 + (9-6i)z - 9i$

19.- Trobeu tots els punts z tals que $-1+i$, $-2+3i$ i z formen un triangle equilàter.

Sol: $-\frac{3}{2} - \sqrt{3} + (2 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$ **i** $-\frac{3}{2} + \sqrt{3} + (2 + \frac{\sqrt{3}}{2})i$

20.- Un quadrat té els vèrtexs al semi-pla superior. Si dos vèrtexs consecutius són $2+i$ i $5+3i$, quins són els altres dos?

Sol: $4i$ **i** $3+6i$

21.- Siguin $z_1 = 0$, z_2, z_3, $z_4 = 2+3i$, z_5, z_6 els vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular. Trobeu z_2, z_3, z_5 i z_6. Quin és el centre de l'hexàgon?

Sol: el centre és $1+\frac{3}{2}i$**, i** $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + (\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2})i$**,** $z_3 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + (\frac{9}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2})i$**,** $z_5 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + (\frac{9}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2})i$**,** $z_6 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} + (\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2})i$**.**

22.- Trobeu les arrels de l'equació $z^2 - (2+5i)z - 6 + 6i = 0$. Quin és el modul i l'argument de cada una? Considereu el triangle que formen aquestes arrels amb l'origen de coordenades. Quina és l'àrea del triangle? Quin és el perímetre? És rectangle?

Sol: les arrels són $2+2i$ **i** $3i$**, i en coordenades polars són** $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ **i** $3e^{\frac{\pi}{2}i}$**. L'àrea és 3, i el perímetre és** 8.0645**. No és rectangle.**

23.- Usant la Fórmula d'Euler doneu una fórmula per $\sin(7\alpha)$ en funció de $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\sin(3\alpha)$ i $\cos(3\alpha)$.

Sol: $\sin(7\alpha) = \cos^2(2\alpha)\sin(3\alpha) + 2\cos(2\alpha)\sin(2\alpha)\cos(3\alpha) - \sin^2(2\alpha)\sin(3\alpha)$**.**

24.- Trobeu totes les solucions de:

$$\sin(x) = 0,\ \sin(x) = e^{\pi/2} - 1,\ \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$$

Sol: $x = k\pi$ **on** $k \in \mathbb{Z}$**, no té solució,** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ **i** $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ **on** $k \in \mathbb{Z}$**,** $x = k\pi$ **on** $k \in \mathbb{Z}$**,** $x = 0.4636 + k\pi$ **on** $k \in \mathbb{Z}$**.**

25.- Recordem que, amb valors apropiats d'A, φ, c_1 i c_2, l'expressió $A\sin(\omega t+\varphi)$ és equivalent a $c_1\sin(\omega t)+c_2\cos(\omega t)$. A més, fixada ω, ambdues expressions són equivalents al fasor $\mathsf{F} = A\exp(i\varphi)$.

(a) Donats els següents parells de c_1 i c_2, calculeu A, φ i el fasor associat: (1) $c_1 = 5$, $c_2 = 7$. (2) $c_1 = -5$, $c_2 = 4$. (3) $c_1 = \sqrt{2}$, $c_2 = -2.5$. (4) $c_1 = \sqrt{3}$, $c_2 = 0$. (5) $c_1 = 0$, $c_2 = 2\sqrt{2}$. (6) $c_1 = -1$, $c_2 = -1$.

Sol: $A = \sqrt{c_1^2+c_2^2}$ **i** $\mathrm{tg}(\varphi) = \dfrac{c_2}{c_1}$**.**

(1) $A = \sqrt{64}$**,** $\varphi = 0.9505$
(2) $A = \sqrt{41}$**,** $\varphi = 2.4668$
(3) $A = \sqrt{8.25}$**,** $\varphi = 5.2272$
(4) $A = \sqrt{3}$**,** $\varphi = 0$
(5) $A = 2\sqrt{2}$**,** $\varphi = \frac{\pi}{2}$
(6) $A = \sqrt{2}$**,** $\varphi = \frac{5\pi}{4}$

(b) Donats els següents parells de A, φ, calculeu c_1 i c_2 i el fasor associat: (1) $A = 7$, $\varphi = 3\pi/7$. (2) $A = 2$, $\varphi = 4.54$. (3) $A = 0.5$, $\varphi = -\pi/4$. (4) $A = 2/\sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/6$.

Sol: $c_1 = A\cos(\varphi)$ **i** $c_2 = A\sin(\varphi)$

(1) $c_1 = 7\cos(\frac{7\pi}{3}) = 1.5576$**,** $c_2 = 7\sin(\frac{7\pi}{3}) = 6.8245$
(2) $c_1 = -0.343$**,** $c_2 = -1.97$
(3) $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$**,** $c_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
(4) $c_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$**,** $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) Donats els fasors F següents, calculeu c_1, c_2, A i φ: (1) $\mathsf{F} = 2+3i$. (2) $\mathsf{F} = 4-4i$. (3) $\mathsf{F} = \sqrt{3}$. (4) $\mathsf{F} = -2i$. (5) $\mathsf{F} = -7+2i$. (6) $\mathsf{F} = -(2+i)$. (7) $\mathsf{F} = 2_{3\pi/11}$. (8) $\mathsf{F} = 5_{3.96}$. (9) $\mathsf{F} = 0.46_{-\pi/7}$. (10) $\mathsf{F} = 2\sqrt{2}_{5\pi/7}$.

Sol: $\mathsf{F} = Ae^{i\varphi} = c_1 + c_2 i$**, és a dir,** $c_1 = \mathrm{Re}(\mathsf{F})$**,** $c_2 = \mathrm{Im}(\mathsf{F})$**,** A **és el mòdul de** F **i** φ **és l'argument principal.**

(1) $\mathsf{F} = 2+3i$**, aleshores** $c_1 = 2$ **i** $c_2 = 3$**, i** $A = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ **i** $\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{3}{2}$ **al primer quadrant,** $\varphi = \mathrm{arctg}(\frac{3}{2}) = 0.9828$
(2) $c_1 = 4$**,** $c_2 = -4$**,** $A = 4\sqrt{2}$ **i** $\varphi = \frac{7\pi}{4}$
(3) $c_1 = \sqrt{3}$**,** $c_2 = 0$**,** $A = \sqrt{3}$ **i** $\varphi = 0$
(4) $c_1 = 0$**,** $c_2 = -2$**,** $A = 2$ **i** $\varphi = \frac{-\pi}{2}$
(5) $c_1 = -7$**,** $c_2 = 2$**,** $A = \sqrt{53}$ **i** $\varphi = 2.8633$
(6) $c_1 = -2$**,** $c_2 = -1$**,** $A = \sqrt{5}$ **i** $\varphi = 3.6052$
(7) $c_1 = 2\cos(\frac{3\pi}{11})$**,** $c_2 = 2\sin(\frac{3\pi}{11})$**,** $A = 2$ **i** $\varphi = \frac{3\pi}{11}$
(8) $c_1 = 5\cos(3.96)$**,** $c_2 = 5\sin(3.96)$**,** $A = 5$ **i** $\varphi = 3.96$
(9) $c_1 = 0.46\cos(\frac{-\pi}{7})$**,** $c_2 = 0.46\sin(\frac{-\pi}{7})$**,** $A = 0.46$ **i** $\varphi = \frac{13\pi}{7}$
(10) $c_1 = 2\sqrt{2}\cos(\frac{5\pi}{7})$**,** $c_2 = 2\sqrt{2}\sin(\frac{5\pi}{7})$**,** $A = 2\sqrt{2}$ **i** $\varphi = \frac{5\pi}{7}$

26.- Un fasor $\mathsf{F} \in \mathbb{C}$ es pot escriure de la forma $A\exp(i\varphi)$ on A és l'*amplitud* i φ és el *desfassament*. Donat el fasor $\mathsf{F} = -\frac{3}{2}(1+\sqrt{3}i)$, trobeu l'amplitud i el desfassament de F^3 i de $\frac{1}{\mathsf{F}}$.

Sol: $\mathsf{F} = 3e^{\frac{4\pi}{3}i}$**,** $\mathsf{F}^3 = 27$ **(**$A = 27$**,** $\varphi = 0$**),** $\frac{1}{\mathsf{F}} = \frac{1}{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$ **(**$A = \frac{1}{3}$**,** $\varphi = \frac{2\pi}{3}$**)**

27.- Digueu si les següents funcions són periòdiques o no (en cas afirmatiu, digueu el període fonamental):

(a) $\sin(\sqrt{2}t) + \cos t$,

(b) $5\sin(3t) + 7\cos(5t)$,

(c) $\sin t + 4\cos(2et)$,

(d) $4\sin(3t) - \sin(7t)$,

(e) $4\sin(3\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t)$,

(f) $\sin(\sqrt{2\pi}t) + \cos t$,

(g) $-\sin(4t) + 2\cos(8t)$.

Sol: (a) no és periòdica, (b) és periòdica amb $T = 2\pi$, (c) no és periòdica, (d) és periòdica amb $T = 2\pi$, (e) és periòdica amb $T = \sqrt{2}\pi$, (f) no és periòdica, (g) és periòdica de període $\frac{\pi}{2}$.

28.- Expresseu l'ona $3\cos(wt) - \sqrt{3}\sin(wt)$ com una ona sinusoidal elemental trobant el fasor corresponent.

Sol: $2\sqrt{3}\sin(\omega t + 2\pi/3)$**,** $F = 2\sqrt{3}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

29.- Quina és la freqüència de $\sin(4t+\pi) + \cos(4t - 5\pi) + \sin\left(4t + \dfrac{\pi}{2}\right)$? Escriviu–la com a ona sinusoidal elemental.

Sol: $\omega = 4$**,** $-\sin(4t) = \sin(4t+\pi)$

30.- Considereu l'ona $\sqrt{2}\cos(\omega_1 t) - 2\sin(\omega_2 t) + 4\sin(\omega_3 t)$ que és suma d'ones sinusoidals. Pels següents valors de ω_1, ω_2 i ω_3 digueu si es tracta d'una ona sinusoidal elemental, i si és periòdica o no. En cas de ser periòdica, trobeu el periode fonamental.

(a) $\omega_1 = \omega_2 = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$, $\omega_3 = \sqrt{7}$.

(b) $\omega_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$, $\omega_2 = \omega_3 = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$.

Sol: (a) no és una ona sinusoidal elemental, és periòdica amb $T = 2\sqrt{7}\pi$, (b) no és una ona sinusoidal elemental, no és periòdica.