

# MÈTODES MATEMÀTICS

Enginyeria Tècnica de Telecomunicació, 2008-2009

Números complexos

1.- Siguin  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = -2 - 3i$ ,  $z_3 = \frac{1}{2} - i$ ,  $z_4 = -5i$ . Calculeu:

$$3z_1 + z_2, |z_1 \cdot z_2|, |z_1| \cdot |z_2|, |z_1 + z_2|, |z_1| + |z_2|, z_1 \cdot z_2 - z_3 \cdot z_4, |\bar{z}_1 - \bar{z}_2^2|, \frac{z_1 + 1}{1 - z_2}, \frac{z_2}{z_4 - \bar{z}_3}, (z_1 + z_3)^2 \cdot \bar{z}_1$$

2.- Donat el nombre complex  $z = \frac{2-xi}{2+xi}$ , trobeu un nombre real  $x$  per a què la part real de  $z$  sigui zero. Hi ha algun  $x$  tal que  $z$  només tingui part real? Quins són aquests  $z$  que s'obtenen?

3.- Convertiu de radians a graus i a l'inrevés els angles següents:

$$45^\circ, \pi \text{ rad}, 7\frac{\pi}{3} \text{ rad}, 240^\circ, 2 \text{ rad}, 136^\circ, 247^\circ, 23 \text{ rad}$$

4.- (a) Trobeu geomètricament, fent servir triangles, els valors de  $\sin(\pi/4)$ ,  $\cos(3\pi/4)$ ,  $\tan(5\pi/4)$ .

(b) Sabent que a 30m de distància la punta d'un arbre es veu en un angle de 60 graus, quina és l'alçada de l'arbre?

5.- Expressau els nombres següents en forma polar:

$$3 + 4i, \quad 2 - i, \quad -3 + i, \quad -2 - 3i.$$

6.- Expressau els següents nombres complexos en la forma  $a + bi$ :

$$e^{i\pi}, \quad e^{1/2+i\pi/4}, \quad e^{e^{2+i\pi/2}}.$$

7.- Calculeu:

$$i \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) \\ \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi}{28}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{28}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{17\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{7}\right)\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{-85\pi}{28}\right) + i \sin\left(\frac{-85\pi}{28}\right)\right).$$

8.- Trobeu tots els complexos tals que el seu conjugat és el seu invers.

9.- Calculeu els nombres següents:  $(1+i)^{29}$ ,  $(-1+i)^{17}$ ,  $(-\sqrt{3}+i)^{13}$ . A més expressau en la forma  $x + iy$ , on  $x$  i  $y$  són reals, els nombres:

$$(2 + 2i)^{12}, \quad (1 - i)^{36}, \quad (-\sqrt{3} - i)^{13}, \quad i^{1999}.$$

10.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$z^2 = i \qquad z^4 = i \qquad z^3 = 1 + \sqrt{3}i \\ z^6 = -1 + i \qquad z^5 = -i$$

11.- Calculeu totes les solucions de les següents equacions:

$$e^{3z-1} = i, \quad e^z = 1, \quad e^{2z} = 4$$

12.- Comproveu que  $1+i$  i  $1-i$  són arrels del polinomi  $P_1(z) = 4 - 6z + 4z^2 - z^3$ . Comproveu que mentre  $1+i$  és arrel del polinomi  $P_2(z) = (2+2i) - 3z - iz + z^2$ ,  $1-i$  no ho és. (Recordeu que un número  $a$  és arrel d'un polinomi  $p(x)$  si  $p(a) = 0$ .)

13.- (a) Trobeu totes les arrels dels següents polinomis:

$$p_1(z) = z^3 + (i-1)z^2 + (1-i)z - 1, \quad p_2(z) = z^2 + z + 1$$

$$p_3(z) = z^4 + z^2 + 1, \quad p_4(z) = z^4 + 2z^2 + 10$$

Indicació: En el primer cas, una de les arrels és natural.

(b) Trobeu totes les arrels del polinomi  $4z^3 - (15+20i)z^2 - (4-75i)z + 20i$  sabent que té una arrel imaginària pura.

14.- (a) Considereu el polinomi  $p(z) = z^4 + 2z^2 + 2$ . Trobeu totes les arrels a  $\mathbb{C}$  i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu  $p(z)$  a  $\mathbb{R}[z]$  i a  $\mathbb{C}[z]$ .

15.- (a) Considereu el polinomi  $p(z) = 2z^5 + 2$ . Trobeu totes les arrels a  $\mathbb{C}$  i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu  $p(z)$  a  $\mathbb{R}[z]$  i a  $\mathbb{C}[z]$ .

16.- (a) Considereu el polinomi  $p(x) = 2x^6 + 4x^5 + 2x + 4$ . Trobeu totes les arrels a  $\mathbb{C}$  i escriviu-les com un nombre complex (en forma cartesiana o polar).

(b) Factoritzeu  $p(x)$  a  $\mathbb{R}[x]$  i a  $\mathbb{C}[x]$ .

17.- Factoritzeu els polinomis  $p_1(z) = 2z^3 + 2z^2 + 3z + 3$  i  $p_2(z) = -z^3 + 4z^2 - 6z + 4$  a  $\mathbb{R}[z]$  i a  $\mathbb{C}[z]$ .

Indicació: Tots dos polinomis tenen una arrel entera.

18.- Trobeu un polinomi a  $\mathbb{C}[z]$  de grau 3 que tingui l'arrel  $-3$  amb multiplicitat 2 i l'arrel  $i$  amb multiplicitat 1.

19.- Trobeu tots els punts  $z$  tals que  $-1+i$ ,  $-2+3i$  i  $z$  formen un triangle equilàter.

20.- Un quadrat té els vèrtexs al semi-pla superior. Si dos vèrtexs consecutius són  $2+i$  i  $5+3i$ , quins són els altres dos?

21.- Siguin  $z_1 = 0$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_4 = 2+3i$ ,  $z_5$ ,  $z_6$  els vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular. Trobeu  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_5$  i  $z_6$ . Quin és el centre de l'hexàgon?

22.- Trobeu les arrels de l'equació  $z^2 - (2+5i)z - 6+6i = 0$ . Quin és el modul i l'argument de cada una? Considereu el triangle que formen aquestes arrels amb l'origen de coordenades. Quina és l'àrea del triangle? Quin és el perímetre? És rectangle?

23.- Usant la Fórmula d'Euler doneu una fórmula per  $\sin(7\alpha)$  en funció de  $\sin(2\alpha)$ ,  $\cos(2\alpha)$ ,  $\sin(3\alpha)$  i  $\cos(3\alpha)$ .

24.- Trobeu totes les solucions de:

$$\sin(x) = 0, \quad \sin(x) = e^{\pi/2} - 1, \quad \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

25.- Recordem que, amb valors apropiats d' $A$ ,  $\varphi$ ,  $c_1$  i  $c_2$ , l'expressió  $A \sin(\omega t + \varphi)$  és equivalent a  $c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)$ . A més, fixada  $\omega$ , ambdues expressions són equivalents al fasor  $F = A \exp(i\varphi)$ .

- (a) Donats els següents parells de  $c_1$  i  $c_2$ , calculeu  $A$ ,  $\varphi$  i el fasor associat: (1)  $c_1 = 5$ ,  $c_2 = 7$ . (2)  $c_1 = -5$ ,  $c_2 = 4$ . (3)  $c_1 = \sqrt{2}$ ,  $c_2 = -2.5$ . (4)  $c_1 = \sqrt{3}$ ,  $c_2 = 0$ . (5)  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 2\sqrt{2}$ . (6)  $c_1 = -1$ ,  $c_2 = -1$ .
- (b) Donats els següents parells de  $A$ ,  $\varphi$ , calculeu  $c_1$  i  $c_2$  i el fasor associat: (1)  $A = 7$ ,  $\varphi = 3\pi/7$ . (2)  $A = 2$ ,  $\varphi = 4.54$ . (3)  $A = 0.5$ ,  $\varphi = -\pi/4$ . (4)  $A = 2/\sqrt{2}$ ,  $\varphi = 5\pi/6$ .
- (c) Donats els fasors  $F$  següents, calculeu  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $A$  i  $\varphi$ : (1)  $F = 2 + 3i$ . (2)  $F = 4 - 4i$ . (3)  $F = \sqrt{3}$ . (4)  $F = -2i$ . (5)  $F = -7 + 2i$ . (6)  $F = -(2 + i)$ . (7)  $F = 2_{3\pi/11}$ . (8)  $F = 5_{3.96}$ . (9)  $F = 0.46_{-\pi/7}$ . (10)  $F = 2\sqrt{2}_{5\pi/7}$ .

26.- Un fasor  $F \in \mathbb{C}$  es pot escriure de la forma  $A \exp(i\varphi)$  on  $A$  és l'amplitud i  $\varphi$  és el defassament. Donat el fasor  $F = -\frac{3}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ , trobeu l'amplitud i el defassament de  $F^3$  i de  $\frac{1}{F}$ .

27.- Diguen si les següents funcions són periòdiques o no (en cas afirmatiu, diguen el període fonamental):

- (a)  $\sin(\sqrt{2}t) + \cos t$ ,  
 (b)  $5 \sin(3t) + 7 \cos(5t)$ ,  
 (c)  $\sin t + 4 \cos(2et)$ ,  
 (d)  $4 \sin(3t) - \sin(7t)$ ,  
 (e)  $4 \sin(3\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t)$ ,  
 (f)  $\sin(\sqrt{2\pi}t) + \cos t$ ,  
 (g)  $-\sin(4t) + 2 \cos(8t)$ .

28.- Expressen l'ona  $3 \cos(\omega t) - \sqrt{3} \sin(\omega t)$  com una ona sinusoidal elemental trobant el fasor corresponent.

29.- Quina és la freqüència de  $\sin(4t + \pi) + \cos(4t - 5\pi) + \sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right)$ ? Escriviu-la com a ona elemental.

30.- Considereu l'ona  $\sqrt{2} \cos(\omega_1 t) - 2 \sin(\omega_2 t) + 4 \sin(\omega_3 t)$  que és suma d'ones sinusoidals. Pels següents valors de  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  i  $\omega_3$  diguen si es tracta d'una ona sinusoidal elemental, i si és periòdica o no. En cas de ser periòdica, trobeu el període fonamental.

- (a)  $\omega_1 = \omega_2 = \frac{3}{\sqrt{7}}$ ,  $\omega_3 = \sqrt{7}$ .  
 (b)  $\omega_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ,  $\omega_2 = \omega_3 = \frac{3}{\sqrt{7}}$ .