(11) $A \subset \mathbb{R} \in \tau \iff A = \emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, x)$ amb $x \in \mathbb{R}$

(a) $\tau$ és una topologia.

Anem a comprovar els axiomes

1. $\emptyset \in \tau$, $\mathbb{R} \in \tau$ per definició

2. Sigui $\{A_i\}_{i\in I}$ amb $A_i \in \tau$ $\forall i$. Volem veure que $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$.

- Si $A_i = \mathbb{R}$ per algun $i$, aleshores $\bigcup_{i\in I} A_i = \mathbb{R} \in \tau$
- Suposem $A_i \neq \mathbb{R}$ $\forall i$.

[ Observem que $(-\infty, x) \cup (-\infty, y) = (-\infty, \max(x,y)) \in \tau$.
Per tant, les unions finites pertanyen a $\tau$. ]

Cada $A_i = (-\infty, x_i)$ on $x_i \in \mathbb{R}$. Per tant $\{x_i\}_{i\in I}$ és un subconjunt dels nombres reals. (Si $A_i = \emptyset$ no contribueix a la unió i no el comptem).

- Si $\{x_i\}_{i\in I}$ no és acotat superiorment, aleshores

$$\bigcup A_i = \mathbb{R}$$

Sempre $\bigcup A_i \subset \mathbb{R}$. Cal veure que si $x \in \mathbb{R}$ aleshores $x \in \bigcup A_i$. Com que $\{x_i\}$ no és acotat superiorment tenim que $\exists x_i > x$, aleshores $x \in (-\infty, x_i) = A_i \subset \bigcup A_i$.

- Si $\{x_i\}_{i\in I}$ està acotat superiorment, prenem $K$ el suprem. Veiem $\bigcup A_i = (-\infty, K)$.

Com que $(-\infty, x_i) \subset (-\infty, K)$, aleshores $\bigcup A_i \subset (-\infty, K)$.
Sigui $x \in (-\infty, K)$, $x < K$, i com que $K$ és la més petita de les cotes superiors, $x$ no pot ser cota superior. Per tant, $\exists x_i > x$ i $x \in (-\infty, x_i) \subset \bigcup A_i$.

Per tant $\bigcup A_i = (-\infty, k) \in \mathcal{Z}$.

- Siguin $A_1 = (-\infty, x_1)$, $A_2 = (-\infty, x_2) \in \mathcal{Z}$
  aleshores $A_1 \cap A_2 = (-\infty, \min(x_1, x_2)) \in \mathcal{Z}$
  jà que $\min(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$.

(b) $\overset{\circ}{\widehat{[0,1]}} = ?$ Hem de buscar un obert contingut a $[0,1]$ però no hi ha cap $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$ contingut a $[0,1]$. Aleshores l'únic obert contingut a $[0,1]$ és el buit. $\overset{\circ}{\widehat{[0,1]}} = \emptyset$

(c) $\overline{(0,1)}$. Hem de buscar el tancat $T$ més petit que $(0,1) \subset T$. Ha de ser de la forma $(-\infty, x)^c$ amb $x \leq 0$. El més petit de tots és $[0, +\infty)$

$\overset{\parallel}{[x, +\infty)}$

$\overline{(0,1)} = [0, +\infty)$.

(d) $\partial[0,1) = ?$

$\overset{\circ}{\widehat{[0,1)}} = \emptyset$ pel mateix motiu que l'apartat (b)

$\overline{[0,1)} = [0, +\infty)$ pel mateix motiu que l'apartat c

$\partial[0,1) = \overline{[0,1)} \setminus \overset{\circ}{\widehat{[0,1)}} = [0, +\infty)$

(e) Hem de veure que $\mathbb{Z}$ és dens a $\mathbb{R}$.

Sigui $x \in \mathbb{R}$, $N \ni x$ entorn d'$x$. Existeix un obert $x \in (-\infty, y) \subset N$. Cal veure que $(-\infty, y)$ talla $\mathbb{Z}$. $(-\infty, y) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$. És a dir, que tot $(-\infty, y)$, $y \in \mathbb{R}$ conté nombres enters. I això es cert! Donat $y \in \mathbb{R}$, sempre existeix $n \in \mathbb{Z}$ amb $n < y$.

16 $f: X \to Y$. Són equivalents:

(a) $f$ contínua

(b) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ \quad \forall B \subseteq Y$

(c) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \forall A \subset X$.

(a) $\Rightarrow$ (b) $B^\circ$ obert $\Longrightarrow$ $f^{-1}(B^\circ)$ obert

Ara $B^\circ \subset B \Rightarrow \underset{\text{obert}}{f^{-1}(B^\circ)} \subset f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B^\circ) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$

[si $A \subset B$, $A$ obert $\Rightarrow A \subset \overset{\circ}{B}$]

(a) $\Rightarrow$ (c) $\overline{A}$ tancat, $\cancel{\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})}$

$\overline{A} \overset{?}{\subseteq} f^{-1}(\underbrace{\overline{f(A)}}_{\text{tancat}})$ . $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ ja que $f(A) \subset \overline{f(A)}$

$\begin{bmatrix} B \text{ tancat} \\ A \subset B \\ \Downarrow \\ \overline{A} \subset B \end{bmatrix} \rightsquigarrow \Rightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{fA}) \Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq \overline{fA}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sigui $U$ obert de $Y$, $U \subset Y$, $\overset{\circ}{U} = U$.

alehores $f^{-1}(U) = f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subseteq \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}$. Però $\overset{\circ}{C} \subseteq C \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}} \Rightarrow f^{-1}(U)$ obert.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sigui $C$ tancat, $C \subset Y$. Veurem $f^{-1}(C)$ és tancat.

$C \subseteq f^{-1}(f(C)) = f^{-1}(f(\overline{C})) \subseteq f^{-1}(\overline{f(C)})$

$\Rightarrow f(C) \subseteq \overline{f(C)}$

$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$

$\Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C) \Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$

$\Rightarrow f^{-1}(C)$ tancat.

(17) $f: X \to Y$ contínua. $A \subseteq X$ dens i

$f(a) = y_0 \quad \forall a \in A$ ( $f|_A$ constant ).

$Y = \mathbb{R} \implies f$ constant.

Per l'exercici anterior $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

$$f(X) = f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{\{y_0\}} = \{y_0\}$$

$A \subset X$ dens, $\bar{A} = X$ — exercici 16 — Els punts són tancats a $\mathbb{R}$, $\overline{\{y_0\}} = y_0$

<u>Exemple</u>: Si $Y = \mathbb{R}$ amb la topologia grollera.

Ara $\bar{y}_0 = \mathbb{R}$. Sigui $X = \mathbb{R}$ amb la topologia mètrica.

Prenem $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ amb $A = \mathbb{Q}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f(A) \equiv 0$. $f$ és contínua ja que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = f^{-1}(\{0,1\})$$

però $f$ no és constant.