Llista 1: Espais topològics i aplicacions contínues

1. (a) Sigui X un espai topològic metritzable. Demostreu que per a cada parell de punts diferents x i y de X hi ha entorns $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ de x i de y respectivament tals que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

   (b) Demostreu que si X té com a mínim dos punts i està dotat de la topologia grollera, llavors X no és metritzable.

   (c) Doneu exemples de topologies a $\mathbb{R}^2$ que no siguin induïdes per cap mètrica (per exemple, la grollera).

2. Sigui $X = \{a, b, c, d\}$. Quins dels següents subconjunts de les parts de X defineixen una topologia i quins no.

   (a) $\emptyset$, X,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$.

   (b) $\emptyset$,X,$\{a\}$,$\{b\}$, $\{b, d\}$.

   (c) $\emptyset$, X,$\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

3. Determineu el nombre de topologies diferents que es poden donar en un conjunt de tres elements.

4. Sigui $X = \mathbb{R}$ i $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} | A = \emptyset \text{ o } A \text{ és infinit}\}$. Defineix τ una topologia a $\mathbb{R}$?

5. Considerem la classe $\tau = \{\mathbb{R}^2, \emptyset\} \cup \{G_k;\ k \in \mathbb{R}\}$ de subconjunts del pla $\mathbb{R}^2$, on

$$G_k = \{(x, y) \mid x > y + k\}$$

   (a) Demostreu que τ és una topologia a $\mathbb{R}^2$.

   (b) És τ una topologia a $\mathbb{R}^2$ si substituïm "$k \in \mathbb{R}$" per "$k \in \mathbb{Z}$"?

   (c) I si substituïm "$k \in \mathbb{R}$" per "$k \in \mathbb{Q}$"?

6. (a) Definim una col·lecció τ de subconjunts de $\mathbb{R}$ de la manera següent:

$$A \in \tau \iff A = \emptyset \text{ o bé } \mathbb{R} \setminus A \text{ conté un nombre finit de punts.}$$

   Comproveu que τ és una topologia (τ s'anomena *topologia dels complements finits* o bé *topologia cofinita*).

   (b) Sigui X un conjunt. Definim una col·lecció de subconjunts de X de la manera següent:

$$A \in \tau \Leftrightarrow A = \emptyset \text{ o bé } X \setminus A \text{ és numerable o bé } X \setminus A \text{ és finit.}$$

   Comproveu que τ és una topologia (τ s'anomena *topologia dels complements numerables*).

7. Sigui (X, τ) un espai topològic. Considereu $Y = X \cup \{a\}$, i definiu $\omega = \{\emptyset, \{a\} \cup U | U \in \tau\}$. Comproveu que (Y, ω) és un espai topològic.

8. Decidiu quins d'aquests subconjunts de $\mathbb{R}^2$ (amb la topologia usual) són oberts, quins són tancats, quins són oberts i tancats i quins no són ni oberts ni tancats:

(i)	$\{(x, y) \mid \ \lvert x + y\rvert < 1\}$.	(iv)	$\{(x, y) \mid x = y,\ x \neq 0\}$.
(ii)	$\{(x, y) \mid \ \lvert x + y\rvert \leq 1\}$.	(v)	$\{(x, y) \mid x^4 + y^4 < 1\}$.
(iii)	$\{(x, y) \mid xy \geq 0\}$.	(vi)	$\{(x, y) \mid \ \lvert x\rvert > 1\} \cup \{(x, y) \mid y = 0\}$.

9. Siguin A i B subconjunts d'un espai topològic X. Utilitzem la notació $\text{Int}(A)$ per indicar l'interior del conjunt A. Demostreu que:

(i)	$\text{Int}(\text{Int}(A)) = \text{Int}(A)$;	(iv)	$\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;	(vii)	$\text{Int}(B - A) = \text{Int}(B) - \overline{A}$;
(ii)	$\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$;	(v)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;	(viii)	$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$;
(iii)	$\text{Int}(A \cup B) \supset \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$;	(vi)	$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$;	(ix)	$\partial(\partial(\partial A)) = \partial(\partial A) \subset \partial A$;

i comproveu que aquests són els millors resultats possibles.

10. (a) Tenen A i $\overline{A}$ els mateixos interiors?
    (b) Tenen A i $\text{Int}(A)$ les mateixes adherències?
    (c) (Problema de Kuratowski) Proveu: $\overline{\text{Int}(\overline{\text{Int}(A)})} = \overline{\text{Int}(A)}$ i $\text{Int}(\overline{\text{Int}(\overline{A})}) = \text{Int}(\overline{A})$.
    (d) Quants conjunts diferents es poden obtenir a partir d'un conjunt A prenent adherències i interiors? (és a dir, $\overline{A}$, $\text{Int}(\text{Int}(A))$, $\overline{\text{Int}(A)}$, ...)

11. Sigui $\mathcal{T}$ la col·lecció de subconjunts de $\mathbb{R}$ formada per $\emptyset$, $\mathbb{R}$ i tots els intervals $(-\infty, x)$, $x \in \mathbb{R}$. Demostreu que $\mathcal{T}$ és una topologia. En aquesta topologia, determineu l'interior de $[0,1]$, l'adherència de $(0,1)$ i la frontera de $[0,1)$. Demostreu que $\mathbb{Z}$ és dens a $\mathbb{R}$.

12. Sigui E un subconjunt dens d'un espai topològic X. Demostreu que per a tot obert $\mathcal{U}$ de X es compleix que $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{U} \cap E}$.

13. Sigui X un espai topològic amb una base numerable d'oberts. Demostreu que aleshores existeix un subconjunt C de X que és dens i numerable. És cert el recíproc?

14. Siguin (X, τ_1) i (X, τ_2) dues topologies sobre un mateix conjunt X. Direm que τ_2 és més fina (resp. estricament més fina) que τ_1 si $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (resp. $\tau_1 \subset \tau_2$).
    (a) Proveu que l'aplicació identitat $id : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ és contínua si i només si τ_2 és més fina que τ_1. Si τ_2 és estrictament més fina que τ_1 proveu que aleshores l'aplicació identitat és una bijecció però no un homeomorfisme.
    (b) Proveu que la topologia usual de $\mathbb{R}$ és estrictament més fina que la topologia cofinita.

15. Sigui $\mathcal{A}$ un recobriment de X, és a dir, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ amb $A_i \subseteq X$ tal que $X = \cup_{i \in I} A_i$. Demostreu que en cadascun dels casos següents una aplicació $f\colon X \longrightarrow Y$ és contínua si i només si ho és restringida a cada $A \in \mathcal{A}$:
    (a) $\mathcal{A}$ és un recobriment per oberts (i.e. els A_i són oberts).
    (b) $\mathcal{A}$ és un recobriment finit per tancats (i.e. els A_i són tancats i I és finit).
    (c) $\mathcal{A}$ és un recobriment per tancats localment finit (tot punt de X té un entorn que talla un nombre finit d'A_i's).

16. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació entre espais topològics. Proveu que són equivalents:
    (a) f és contínua;
    (b) $f^{-1}(B^\circ) \subseteq (f^{-1}(B))^\circ$ per tot $B \subseteq Y$;
    (c) $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per tot $A \subseteq X$.

17. Sigui $f : X \to Y$ una aplicació contínua i $A \subseteq X$ un subconjunt dens. Si $f|_A$ és constant i $Y = \mathbb{R}$ aleshores f és també constant. Trobeu un contraexemple si Y no és la recta real. Doneu una condició necessària i suficient sobre Y per tal que l'enunciat anterior sigui cert.