Llista 2: Topologia producte i topologia quocient

1. Sigui D^2 el disc unitat de $\mathbb{R}^2$ i sigui $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ un homeomorfisme. Demostreu que existeix una extensió de f al disc, $\hat{f} : D^2 \longrightarrow D^2$, que és un homeomorfisme.

2. Demostreu que $\mathbb{R}^n - \{0\} \cong \mathbb{R} \times S^{n-1}$ per a tot n.

3. Demostreu que els dos subconjunts següents del pla $\mathbb{R}^2$ (amb les topologies usuals) no són homeomorfs: $X = \{x \mid d(x, p_0) = 1 \text{ o } d(x, p_1) = 1\}$, $Y = \{x \mid d(x, p_2) = 1\}$ on $p_0 = (0, -1)$, $p_1 = (0, 1)$ i $p_2 = (0, 5)$. (Per exemple, podeu utilitzar que $\mathbb{R}$ no té cap subconjunt propi que sigui obert i tancat.)

4. Demostreu que l'anell tancat $\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq \|x\| \leq 2\}$ és homeomorf al cilindre
$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1,\ 0 \leq x_3 \leq 1\}.$$

5. Diem que un subespai $X \subset Y$ és un *retracte* de Y si i només si existeix una aplicació $r\colon Y \longrightarrow X$ contínua tal que $r \circ \iota = \mathrm{id}$, on ι denota la inclusió de X en Y. Demostreu que:
   (a) $[0, 1]$ és un retracte de $\mathbb{R}$.
   (b) D^n és un retracte de $\mathbb{R}^n$.
   (c) S^{n-1} és un retracte de $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
   (d) S^1 és un retracte de la banda de Möbius.

6. (a) Sigui X un espai topològic i $A \subset X$ un subconjunt dens. Demostreu que tots els oberts no buits de X/A tenen un punt comú.
   (b) Sigui $A_n \subset S^1$ el conjunt format per les solucions complexes de l'equació $z^n = 1$, on $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$. Descriviu el quocient S^1/A_n.

7. Considerem la següent relació d'equivalència a $\mathbb{R}$: $x \sim y$ sii $x - y \in \mathbb{Q}$. Identifiqueu la topologia induïda per aquesta relació d'equivalència a $\mathbb{R}/\sim$.

8. Demostreu que els espais $X = \mathbb{R}/(0, 1)$ i $Y = \mathbb{R}/[0, 1]$ no són homeomorfs. (Indicació: Demostreu que $Y \cong \mathbb{R}$.)

9. Demostreu que si A és obert o tancat a X, aleshores $X - A \cong X/A - \{A\}$. Comproveu que això no és necessàriament cert per a un conjunt A qualsevol.

10. Siguin X i Y dos espais topològics. Donat $y \in Y$, proveu que el subespai $X \times y \subset X \times Y$ és homeomorf a X.

11. Considerem les projeccions
$$p_1 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_1 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 \end{array} \qquad p_2 : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \longrightarrow & X_2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_2 \end{array}$$
Demostreu que són obertes i comproveu que en general no són tancades.

12. Sigui $\pi_1 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la projecció sobre la primera coordenada, és a dir, $\pi_1(x, y) = x$. Sigui $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0 \text{ o } y = 0\}$. Sigui $q \colon A \to \mathbb{R}$ la restricció de π_1 a A. Demostreu que l'aplicació q compleix el següent:

    (a) és una aplicació quocient (és a dir, $\mathcal{U}$ és obert de $\mathbb{R}$ si i només si $q^{-1}(\mathcal{U})$ és obert de A),

    (b) no és oberta ni tancada.

13. Siguin $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ subconjunts d'espais topològics X i Y.

    (a) Quina relació hi ha entre $\overline{A \times B}$ i $\overline{A} \times \overline{B}$?

    (b) I entre $\mathrm{Int}(A \times B)$ i $\mathrm{Int}(A) \times \mathrm{Int}(B)$?

14. Demostreu que $\prod_i A_i$ és dens a $\prod_i X_i$ si i només si ho és cada $A_i \subset X_i$.

15. Siguin X, Y i Z espais topològics tal que $X \times Y \cong X \times Z$. Implica això que $Y \cong Z$? (Indicació: trobeu un espai X no buit tal que $X \cong X \times X$.)

16. Considerem l'acció $\mu \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donada per $\mu(n, x) = n + x$. Demostreu que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.

17. Considerem l'acció $\mu : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donada per

    $$\mu((m, n), (x, y)) = (m + x,\ n + y).$$

    Demostreu que $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ és homemorf al tor.

18. Sigui X la banda infinita $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1/2 \leq y \leq 1/2\}$ de $\mathbb{R}^2$, sobre la qual actua $\mathbb{Z}$ com

    $$m \cdot (x, y) = (m + x,\ (-1)^m y).$$

    Demostreu que $X/\mathbb{Z}$ és homeomorf a la banda de Möbius.

19. Sigui $X = \mathbb{C} - \{0\}$ i considerem l'acció de $\mathbb{Z}$ donada per $n \cdot z = 2^n z$. Demostreu que $(\mathbb{C} - \{0\})/\mathbb{Z} \cong S^1 \times S^1$.

20. (a) Doneu exemples d'espais topològics X i Y sobre els quals operi un grup G de manera que $X/G \cong Y/G$, però tals que X i Y no siguin homeomorfs.

    (b) Demostreu que la projecció $X \longrightarrow X/G$ és sempre oberta i demostreu que és tancada si el grup G és finit.

    (c) El grup additiu de $\mathbb{Q}$ opera sobre la recta real com $q \cdot x = q + x$. Demostreu que la projecció $\pi \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ no és tancada.