Llista 3: Propietats de separació i compacitat

1. Considerem l'el·lipsoide
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 = 1 \right\}$$
i l'hiperboloide
$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z^2 = x^2 - y^2 \right\}$$
amb la topologia de subespai de $\mathbb{R}^3$. Raoneu si són o no són compactes.

2. Demostreu que la gràfica d'una funció $f\colon I \to \mathbb{R}$ és compacta si i només si f és contínua. Doneu un exemple d'una funció discontínua $g\colon I \to \mathbb{R}$ amb gràfica tancada però no compacta.

3. (a) Sigui $X = \mathbb{N} \cup \{-1,-2\}$ i τ definit per: $M \in \tau$ si i només si $M \subset \mathbb{N}$ o bé $\mathbb{N} \subset M$. Proveu el següent:
   i. (X,τ) és un espai topològic;
   ii. (X,τ) és compacte;
   iii. existeixen subconjunts compactes i oberts X_1 i X_2 de X tals que $X_1 \cap X_2$ no és compacte.

   (b) Demostreu que tota intersecció de compactes tancats és compacta i tancada.

4. Siguin X_1 i X_2 dos espais topològics i siguin $K_i \subset X_i$, $i = 1,2$, subespais compactes. Demostreu que tot entorn de $K_1 \times K_2$ a $X_1 \times X_2$ conté un entorn de la forma $U_1 \times U_2$ amb $K_i \subset U_i$ obert per a $i = 1,2$.

5. Proveu que la projecció $i_2 : X \times Y \to Y$ és tancada si X és compacte.

6. Sigui X un espai Hausdorff i x un punt de X. Demostreu que la intersecció de tots els oberts que contenen x és $\{x\}$. Doneu un contraexemple si X no és Hausdorff.

7. Sigui A un subconjunt dens d'un espai topològic X. Demostreu que X/A no és Hausdorff.

8. Siguin $f,g\colon X \to Y$ aplicacions contínues entre espais topològics amb Y Hausdorff. Sigui A un subconjunt dens de X tal que $f(a) = g(a)$ per tot $a \in A$. Proveu que $f = g$.

9. Siguin X un espai topològic Hausdorff i $A_1, \ldots, A_n$ amb $n \geq 1$ una col·lecció de subespais compactes tals que $\cap_{i=1}^n A_i = \emptyset$. Proveu que existeixen oberts $U_1, \ldots, U_n$ de X amb $A_i \subset U_i$ per tot $i = 1, \ldots, n$ i $\cap_{i=1}^n U_i = \emptyset$.

10. Sigui $f\colon X \to Y$ contínua i exhaustiva, amb X compacte i Y Hausdorff. Demostreu que Y té la topologia quocient determinada per f.

11. Sigui X compacte i Hausdorff, $f\colon X \to Y$ una aplicació tal que Y té la topologia quocient per f. Proveu que les següents afirmacions són equivalents:

    (a) Y és Hausdorff.

    (b) f és tancada.

    (c) Δ_f és tancat on $\Delta_f = \{(x_1,x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$.

12. Sigui $X \neq \emptyset$ un espai topològic compacte Hausdorff i $f : X \to X$ una aplicació contínua. Considereu el subespai $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^i(X)$. Proveu les següents afirmacions:

    (a) A és compacte i tancat .

    (b) $A \neq \emptyset$.

    (c) $f(A) = A$.

13. Sigui $f : D^n \to D^n$ una aplicació contínua tal que, si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ per tot $x \neq y$, on d és la mètrica euclidiana. Proveu que f té un únic punt fix. (Difícil!)

14. Direm que una aplicació contínua $f : X \to Y$ és pròpia si la antiimatge de tot compacte és compacte. Demostreu que si f és tancada i $f^{-1}(y)$ és compacte per tot $y \in Y$ aleshores f és pròpia.