

llista 5: Superfícies

1. Designem per T el tor, K l'ampolla de Klein i P el pla projectiu. Demostreu l'existència dels homeomorfismes següents:
 - (a) $P\#P = K$.
 - (b) $P\#T = P\#K$.
 - (c) $P\#P\#P = P\#K$.
2. Considereu les arestes d'un cub. Imagineu que cada aresta és un tub i considereu la superfície formada per les superfícies d'aquests tubs. Construïu un homeomorfisme entre aquesta superfície i una suma connexa de tors.
3. La vora d'una banda de Möbius és una circumferència. Considereu dues bandes de Möbius i identifiqueu les seves vores. Demostreu que s'obté una ampolla de Klein.
4. Fem un petit forat circular a un pla projectiu. Demostreu que el que queda és homeomorf a una banda de Möbius.
5. Trobeu triangulacions del pla projectiu, l'esfera i el tor. Calculeu les característiques d'Euler d'aquestes superfícies.
6. Si S_1 i S_2 són superfícies compactes, trobeu una fórmula que relacioni les característiques d'Euler de S_1 , S_2 i $S_1\#S_2$.
7. Demostreu que l'esfera i el tor són orientables mentre que el pla projectiu i l'ampolla de Klein no ho són.
8. Demostreu que S i T no són homeomorfs. Demostreu que K i T no són homeomorfs. Demostreu que T i $T\#T$ no són homeomorfs.
9. Considereu un triangle amb els costats identificats segons la "paraula" aaa^{-1} . Demostreu que l'espai que resulta no és una superfície.
10. Un habitant d'un món bidimensional vol saber la forma global del seu món. Per això el divideix en pentàgons de manera que cada aresta és comú a dos pentàgons i cada vèrtex és comú a quatre pentàgons. Observa, a més, que tothom sempre porta el rellotge a la ma dreta. Cada vegada que compta les cares s'equivoca, però sempre obté un número entre vint i trenta. Quantes cares hi ha realment? Com és el seu món?